

هوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
تعلیم و تعلم عبادت است

هندسه

سال دوم

آموزش متوسطهٔ عمومی - ریاضی و فیزیک

۲۳۳

پدیدآورندگان :

مؤلفان : محمود فصیحیان محمود کرباسی

رسام : فرهاد مجذوب

چاپ از : چاپخانه اتحاد

فهرست

فصل ۱

نسبت و تناسب

نسبت دو کمیت

نسبت دو کمیت همجنس کسری است کـه صورت ومخرج آن ، اندازه‌های آن دو کمیت برحسب یك واحد باشند . با تشکیل نسبت دومقدار نوعی مقایسه مابین آنها انجام می‌گیرد و معلوم می‌کند یکی چند برابر دیگری ، یا یکی چه‌کسری از دیگری است . نسبت دو کمیت «عدد مطلق» است و برحسب واحد معینی بیان نمی‌شود، مثلا نسبت دوپاره خطراکه یکی ۱۰ سانتیمتر و دیگری ۱۵ سانتیمتر است چنین می‌نویسند $\frac{۱۰}{۱۵}$ ، چون نسبت دو عدد خارج‌قسمت آنهاست‌که به‌صورت‌کسر نوشته می‌شود ، بنابراین دارای همان خواصی است‌که درحساب وجبر برای‌کسر گفته‌ایم از آن جمله «صورت ومخرج کسری‌را مـی‌توان‌در عددی (جز عدد صفر) ضرب و یا بر عددی (جز عدد صفر) تقسیم‌نمود» لذا نسبت دوپاره خط بالا به‌صورت $\frac{۲}{۳}=\frac{۱۰}{۱۵}$ است، و نیز می‌توان گفت‌که اندازهٔ پاره‌خط‌کوچکتر $\frac{۲}{۳}$ اندازهٔ پاره‌خط بزرگتر است ، یا پاره‌خط بزرگتر $\frac{۳}{۲}$ پاره‌خط کوچکتر مـی‌باشد (یعنی پاره‌خط بزرگتر یك ونیم برابر پاره‌خط کوچکتر است) نسبت دو عدد یا دوکمیت با نمادهای زیـر نشان داده می‌شود (به فرض آن‌که این دوعدد ۳ و ۴ اختیار شوند) .

الف : ۴ : ۳ یـا ۴÷۳ ، ب : ۳ به ۴ کـه همان ۳ تقسیم بـر ۴ است ،

ج : $\frac{۳}{۴}$ ، د : ۰/۷۵ ، ه : ٪۷۵ .

نسبت دوکمیت همجنس بستگی به واحد اندازه‌گیری آنها ندارد .

مثال ۱- نسبت دو پـاره‌خط به اندازه‌های سه‌متر و پنج‌متر برابر است با $\frac{۳}{۵}$ کـه هـردو پاره‌خط با واحد متر اندازه‌گیری شده‌اند ، اگر واحد اندازه‌گیری آن دوپاره‌خط دسیمتر اختیار شود نسبت‌آنها $\frac{۳۰}{۵۰}$ می‌شودکه مساوی $\frac{۳}{۵}$ است، اگر واحد اندازه‌گیری‌آنها سانتیمتر باشد نسبت آنها برابر است با $\frac{۳۰۰}{۵۰۰}$ یعنی برابر با $\frac{۳}{۵}$ است .

مثال ۲ ـ نسبت دوپاره‌خط به اندازه‌های ۲ سانتیمتر و ۱۵ میلیمتر برابر است با $\frac{۲۰}{۱۵}$ که مساوی $\frac{۴}{۳}$ می‌باشد.

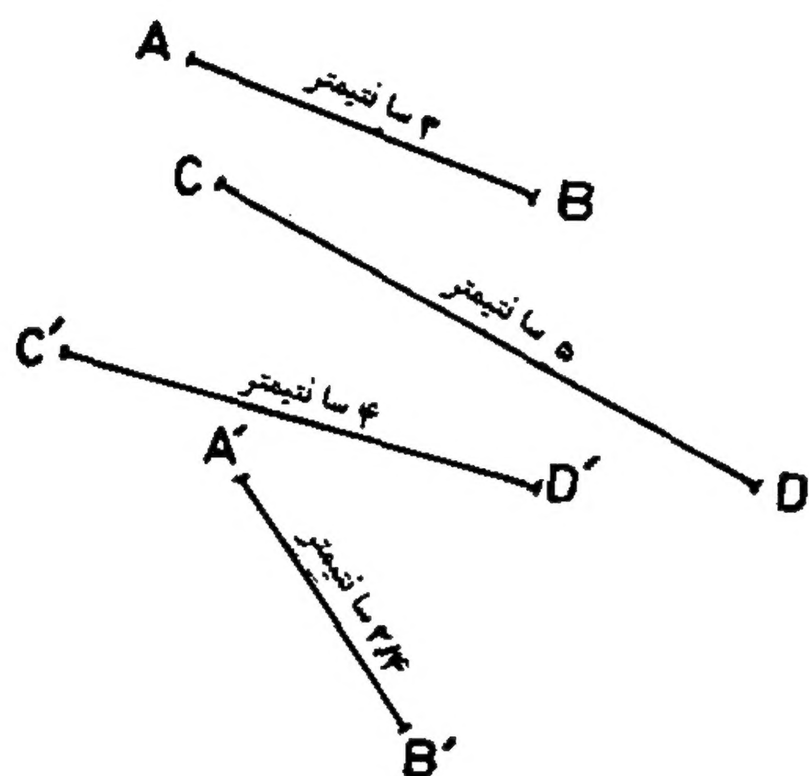
به مثالهای زیر توجه کنید :

می‌خواهیم نسبتهای زیر را که با دوعدد یا دوجملهٔ جبری نشان داده شده‌است تعیین کنیم.

الف : ۵۰ به ۶۰ ، ب : ۶/۳ به ۰/۹ ، ج : ۱۲ به $\frac{۳}{۸}$ ،

د : $5x$ به $2x$ $(x\neq 0)$ ، ه : a^3 به $5a^2$ $(a\neq 0)$

این نسبتها به‌ترتیب عبارتند از: $\frac{۵}{۶}$ ، ۷ ، ۳۲ ، $\frac{۵}{۲}$ و $\frac{a}{5}$



پاره‌خطهای متناسب ـ تناسب

در شکل مقابل $\frac{AB}{CD}=\frac{۳}{۵}$ و $\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{۲/۴}{۴}$ چون $\frac{۳}{۵}=\frac{۲/۴}{۴}$ ،

نتیجه می‌شود $\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$ (۱)

با توجه به رابطهٔ (۱) گوییم پاره‌خطهای (AB و CD) با پاره‌خطهای (A′B′ و C′D′) متناسب هستند .

تناسب

تناسب بیان تساوی دو نسبت است.

تناسب بین چهار پاره‌خط را گاهی با رابطهٔ (AB و CD)∼(A′B′ و C′D′) هم نمایش می‌دهند. باچهار پاره‌خط بالا می‌توان تناسبهای دیگری نیز تشکیل داد، مثلاتناسب $\frac{AB}{A'B'}=\frac{CD}{C'D'}$ (۲)

مقدار مشترك نسبتهای تناسب (۱) عدد مطلق ۰/۶ است، مقدار مشترك نسبتهای تناسب (۲) کدام عدد مطلق است ؟

به طور کلی اگر چهار پاره‌خط به اندازه‌های a ، b ، c و d چنان اختیار کنیم‌که تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ بین آنها برقرار باشد مقادیر یا اندازه‌های a ، b ، c و d را به‌ترتیب جزء های اول تا چهارم تناسب می‌نامیم ، تناسب بالا را می‌توان به‌صورت $a : b = c : d$ دریك سطر نوشت ، دو جزء اول وچهارم یعنی a و d را طرفین تناسب ودو جزء دوم وسوم یعنی b و c را وسطین تناسب می‌نامند .

خواص تناسب - درهرتناسب‌حاصل‌ضرب‌طرفین‌برابر است با حاصل‌ضرب وسطین، یعنی‌از تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ نتیجه می‌شود: $ad=bc$ ؛ زیرا اگرمقدارمشترك‌دونسبت‌مساوی‌را k فرض‌کنیم، داریم : $\frac{a}{b}=k$ و $\frac{c}{d}=k$ وازآنجا $a=bk$ و $dk=c$ و ازضرب‌دوتساوی اخیر نتیجه می‌شود $adk=bck$ و به‌طور خلاصه $ad=bc$.

از تساوی $ad=bc$ چندین تناسب دیگر به‌شکلهای مختلف می‌توان نتیجه‌گرفت (مانند تناسب $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ «چرا ؟»). تناسب دارای خواص‌دیگری نیز هست،ما دراین‌کتاب به‌طور اختصار آنها را ذکر می‌کنیم .

از تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تناسبهایی نظیر $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ ، $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ و $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$ نیزنتیجه می‌شود (چرا؟).

همچنین تناسبهای $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (۱) و $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (۲) ازتناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ نتیجه می‌شوند زیرا تناسب (۱) حاصل $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$ وتناسب(۲)حاصل $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$ می‌باشد. (می‌گویند تناسبهای (۱) و (۲) به‌ترتیب با عمل ترکیب نسبت در صورت و تفضیل نسبت در صورت از تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ به‌دست‌آمده‌اند). ازتناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تناسبهای $\frac{a}{a\pm b}=\frac{c}{c\pm d}$ و $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ را نیز مـی‌توان نتیجه گـرفت (طریقهٔ نتیجه‌گیری تناسبهای اخیر بـه عهدهٔ دانش‌آموزان است).

مثال - از تناسب $\frac{۵}{۸}=\frac{۱۵}{۲۴}$ مـی‌توان تناسبهای $\frac{۸}{۵}=\frac{۲۴}{۱۵}$ و $\frac{۵}{۱۵}=\frac{۸}{۲۴}$ و $\frac{۱۵}{۵}=\frac{۲۴}{۸}$ را نتیجه‌گرفت؛ باید توجه داشت‌که مقدار نسبتها درسه تناسب اخیر با هم مساوی نیستند ومقدار آنها به‌ترتیب برابرند با ۰/۶۲۵ و ۱/۶ و $\frac{۱}{۳}$ و ۳ (دوعدد ۰/۶۲۵ و ۱/۶ عکس یکدیگرند و $\frac{۱}{۳}$ و ۳ نیز عکس یکدیگر می‌باشند) .

مسئله ـ اگر داشته باشیم : $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\dots=k$ ثابت کنید که :

$$\frac{a+b+c+\dots}{a'+b'+c'+\dots}=k$$

حل‌ـ داریم: $a=a'k$ و $b=b'k$ و $c=c'k$ و... چون‌تساویهای اخیر راعضو به‌عضو با هم جمع‌کنیم حاصل می‌شود :

$$(a+b+c+\dots)=(a'+b'+c'+\dots)k$$

و از آنجا

$$\frac{a+b+c+\dots}{a'+b'+c'+\dots}=k$$

مسئله ـ مجموع دوپاره‌خط ۳۹ سانتیمتر است و نسبت آنها به‌یکدیگر مثل نسبت ۵ به ۸ می‌باشد . می‌خواهیم اندازهٔ هریك از دوپاره‌خط را حساب کنیم .

حل ـ چون پاره‌خط کوچکتر را x فرض کنیم پاره‌خط بزرگتر $۳۹ - x$ می‌شود و بنابه‌فرض مسئله داریم :

$$\frac{x}{۳۹ - x} = \frac{۵}{۸}$$

پس‌از ترکیب نسبت درمخرج تناسب نتیجه می‌شود

$$\frac{x}{۳۹ - x + x} = \frac{۵}{۸ + ۵}$$

و یا

$$\frac{x}{۳۹} = \frac{۵}{۱۳}$$

و از آنجا

$$x = ۱۵$$

یعنی پاره‌خط کوچکتر ۱۵ سانتیمتر و درنتیجه پاره‌خط بزرگتر مساوی ۲۴ سانتیمتر است.

واسطهٔ هندسی ـ اگر سه پاره‌خط به اندازه‌های a ، b و c چنان اختیار کنیم که مابین آنها تناسب $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ برقرارباشد،درنتیجه تساوی $b^2 = ac$ نیز برقرارخواهد بود و دراین‌صورت می‌گوییم پاره‌خط به اندازهٔ b واسطهٔ هندسی بین دوپاره‌خط به اندازه‌های a و c می‌باشد .

از تساوی $b^2 = ac$ نتیجه می‌شود : $b = \sqrt{ac}$ ، یعنی اندازهٔ واسطهٔ هندسی بین دوپاره‌خط برابر است با ریشهٔ دوم (جذر) حاصل‌ضرب اندازه‌های آن دوپاره‌خط (بدیهی است آن دوپاره‌خط باید با یك واحد اندازه‌گیری شده باشند) . مثلا پاره‌خطی بـه اندازهٔ ۶ سانتیمتر واسطهٔ هندسی بین دوپاره‌خط به اندازه‌های ۴ سانتیمتر و ۹ سانتیمتر می‌باشد (چرا ؟) .

مسئله ـ می‌خواهیم اندازهٔ ضلع مربعی‌را حساب کنیم که مساحت‌آن برابر مساحت مستطیلی به درازای ۱۶ متر و به پهنای ۹ متر باشد .

حل ـ اگر اندازهٔ ضلع مربع را a فرض کنیم مساحت آن a^2 خواهد شد که بنابه‌فرض $a^2 = ۹ \times ۱۶$ است و لذا $a = ۱۲$ می‌شود (ضلع مربع ۱۲ متر است) .

تمرین

۱ـ کدام‌یك‌از گزاره‌های زیر درست وکدام نادرست است .

نسبت دوپاره‌خط مساوی است با نسبت اندازه‌های آنها ـ اگر درازای زمینی ۲۴ متر و پهنای آن ۸ متر باشد نسبت درازای‌زمین به‌پهنای زمین ۳ متر است ـ چهار پاره‌خط به‌اندازه‌های a و b و c و d که بین آنها رابطهٔ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ برقرار است ، تناسبهای دیگری بـا اجزای a و b و c و d تشکیل می‌دهند که نسبت مشترك آنها k است ـ فقط یك‌پاره‌خط می‌توان یافت که واسطهٔ هندسی بین‌دوپاره‌خط مفروض باشد ـ دریك تناسب می‌توان اندازه‌های‌نسبت اول‌را

با یك واحد واندازه‌های نسبت دوم را با واحد دیگری اندازه‌گیری کرد.

۲ـ اگر اندازه‌های پاره‌خطهای AB و CD به‌ترتیب برابر ۲۵ سانتیمتر و ۳ دسیمتر باشد، نسبتهای $\frac{AB}{CD}$ و $\frac{CD}{AB}$ را تعیین کنید. AB چه جزئی از CD است.

۳ـ درازای یك زمین ۷ متر و ۲ دسیمتر و پهنای آن ۵ متر و ۶ دسیمتر است. نسبت درازای زمین به‌پهنای آن را تعیین کنید. نسبت پهنای زمین به درازای آن چیست؟ پهنای زمین چه‌جزئی از درازای آن است.

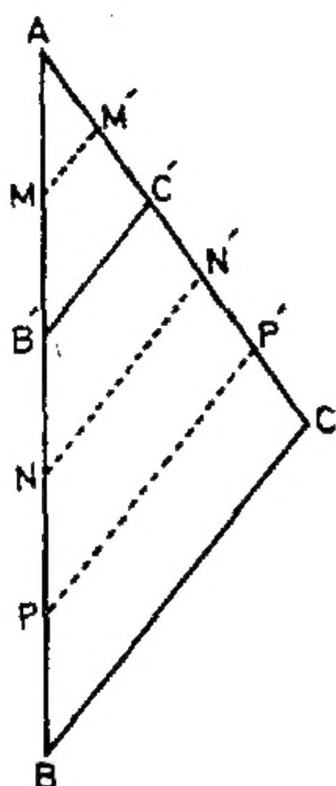
۴ـ محیط مستطیلی ۶۴ سانتیمتر است ونسبت درازا به‌پهنای‌آن $\frac{۵}{۳}$ است.

اولاً ـ اندازه‌های درازا وپهنای مستطیل را به‌دست آورید.

ثانیاً ـ درازای ضلع مربعی را حساب‌کنیدکه مساحت آن مساوی مساحت مستطیل باشد.

۵ـ مطلوب است تعیین اندازه‌های دوپاره‌خط برحسب اعداد درست به‌طریقی‌که پاره‌خط به اندازهٔ ۸ سانتیمتر واسطهٔ هندسی آن دوپاره‌خط باشد. (مسئله چند جواب دارد؟)

۶ـ سه پاره‌خط به اندازه‌های ۴، ۵ و ۸ که با یك واحد اندازه‌گیری شده‌اند مفروضند. کلیهٔ تناسبهایی را تشکیل دهید کـه x یکی‌از اجزا و ۴، ۵ و ۸ سه جزء دیگر آن بـاشند و مقادیر x را درکلیهٔ تناسبها به دست آورید.



قضیهٔ تالس: خطی که به موازات یك ضلع از مثلثی رسم شود دو ضلع دیگر را به یك نسبت قطع می‌کند.

درشکل مقابل پاره خط $B'C'$ به موازات ضلع BC رسم شده است می‌خواهیم ثابت کنیم $\frac{AB'}{B'B}=\frac{AC'}{C'C}$

برهان: ابتدا واحدی چنان اختیار می‌کنیم که اگر AB' را به دو قسمت مساوی تقسیم کرد $B'B$ را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کند (ولی همیشه در چنین عملی ممکن نیست در این صورت می‌توان واحد کوچکتری انتخاب نمود تا واحد انتخاب شده باندازه صحیح در AB' و BB' گنجانیده شود) بنابراین داریم:

$$AM = MB' = B'N = NP = PB$$

سپس از نقاط تقسیم یعنی M و N و P خطوطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا ضلع AC

را به ترتیب در نقاط M' و N' و P' قطع کند و با توجه به اینکه

$$MM' || B'C' || NN' || PP' || BC$$

نتیجه می‌شود که

$$AM' = M'C' = C'N' = N'P' = P'C$$

اکنون می‌توانیم بنویسیم

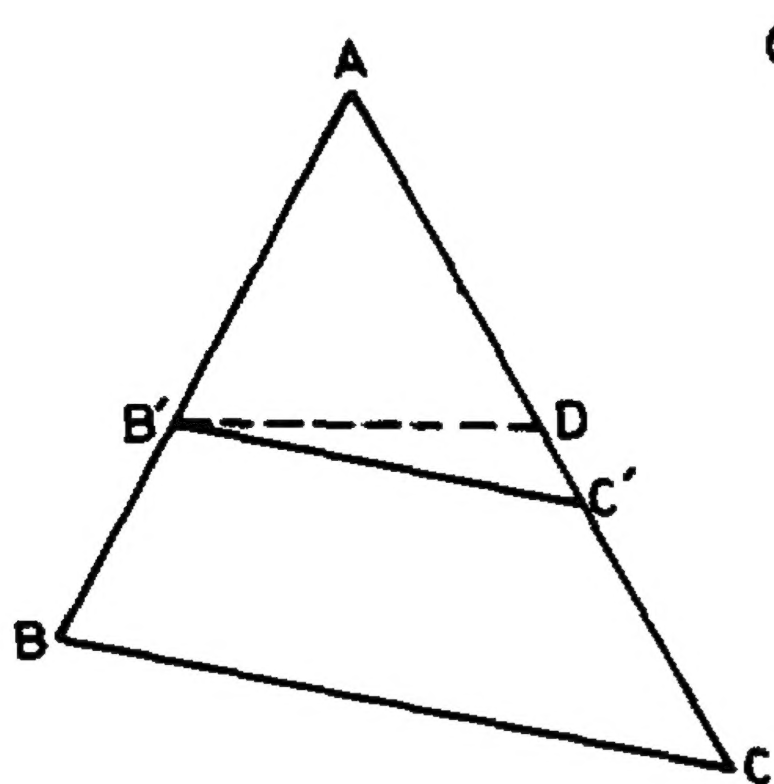
$$\frac{AB'}{B'B} = \frac{۲}{۳} \text{ و } \frac{AC'}{C'C} = \frac{۲}{۳}$$

از دو رابطه اخیر نتیجه می‌شود که :

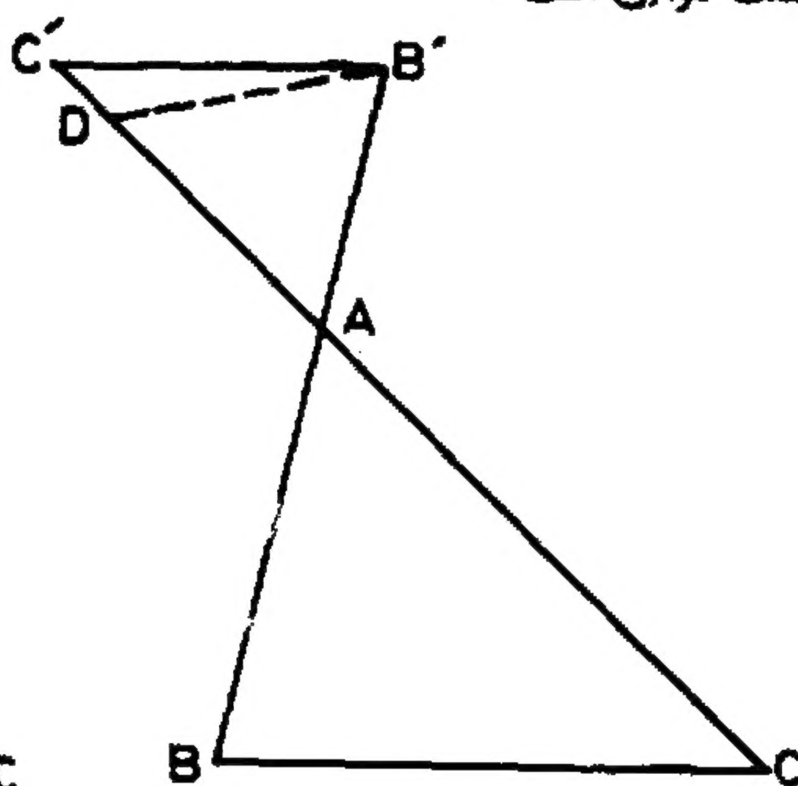
$$\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$$

توجه : از تساوی $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$ می‌توان رابطه $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ را نتیجه گرفت .

عکس قضیهٔ تالس ـ هر خط که دوضلع مثلثی (یا امتداد آنها) را قطع‌کند و برآن‌دوضلع پاره‌خطهای متناظری پدید آورد که با اضلاع متناظر ازآن مثلث متناسب باشند ، با ضلع سوم مثلث موازی است .



شکل (۱)



شکل (۲)

در شکلهای (۱) و (۲) خط $B'C'$ اضلاع AB و AC و یا امتداد آنها را به ترتیب در نقاط B' و C' قطع نموده است به‌قسمی که $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$.می‌خواهیم ثابت‌کنیم $B'C'$ با BC موازی است .

برهان خلف ـ اگر $B'C'$ موازی BC نباشد ، ازنقطهٔ B' خطی موازی BC رسم‌می‌کنیم، این خط ضلع AC یا امتداد آن را در نقطه‌ای مانند D قطع می‌کند ؛ چون $B'D$ موازیBC

است بنا به‌قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{AD}{AC}$$

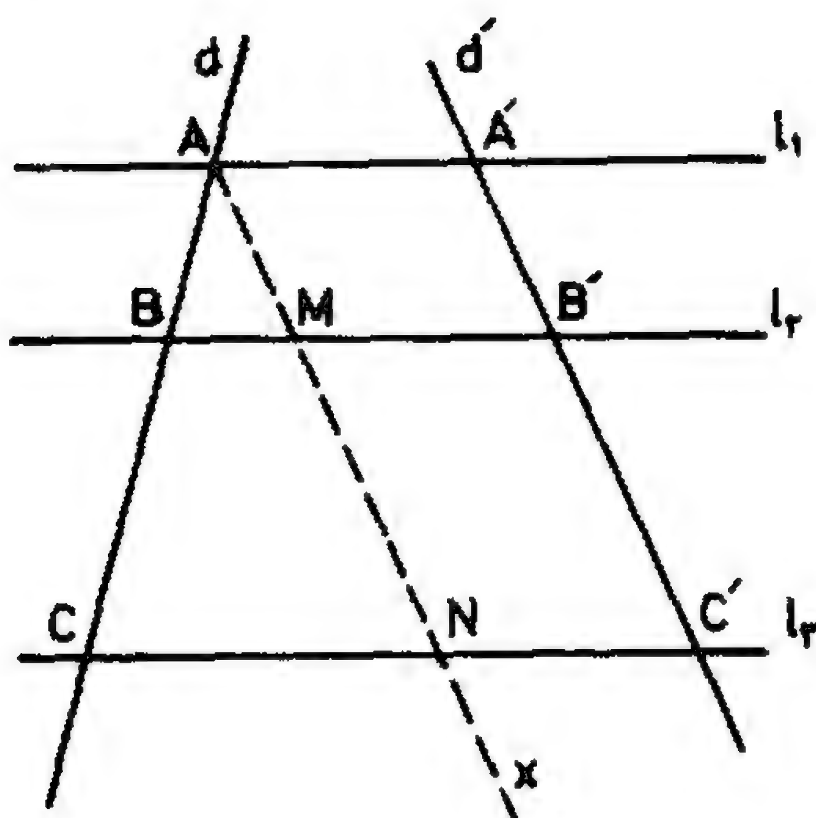
از مقایسهٔ این تساوی با تساوی فرض قضیه نتیجه می‌شود :

$$\frac{AC'}{AC}=\frac{AD}{AC}$$

دراین تناسب چون مخرجها مساویند بدیهی است‌که صورتها نیز برابر خواهند بود ، یعنی : $AD=AC'$ پس دو نقطهٔ D و C' برهم منطبق هستند ، به عبارت دیگر خط $B'D$ که موازی BC رسم شده بر $B'C'$ منطبق است .

قضیه - هرگاه دوخط مورب از یك صفحه به‌وسیلهٔ سه خط موازی درآن صفحه قطع شوند، قطعات جدا شده از دوخط مورب نظیر به‌نظیر متناسبند .

در شکل زیر سه خط متوازی l_1 و l_2 و l_3 دوخط مورب d و d' را به ترتیب در نقاط (A ، B و C) و (A' ، B' و C') قطع نموده‌اند؛ می‌خواهیم ثابت کنیم: $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$



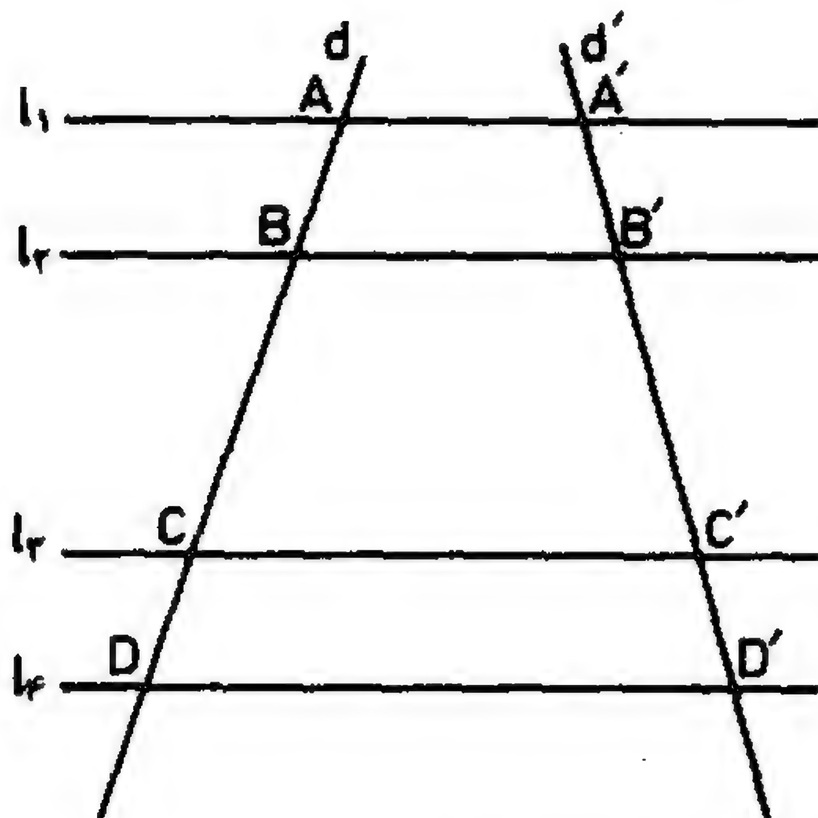
برهان- ازنقطهٔ A نیم‌خط Ax را موازی خط d' رسم می‌کنیم تا خطوط l_2 و l_3 را در نقاط M و N قطع نماید ، چون $BM\|CN$ است بنابه‌قضیهٔ تالس داریم :

$$(1)\quad \frac{AB}{AM}=\frac{BC}{MN}$$

چهارضلعیهای $AA'B'M$ و $MB'C'N$ متوازی‌الاضلاع هستند چرا ؟ ، بنابراین

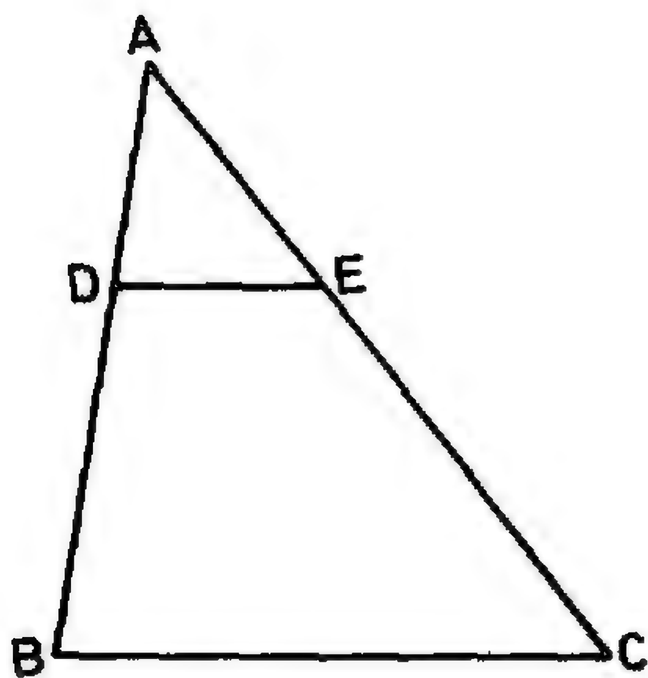
$A'B'$ و $AM=A'B'$ ؛ چون درتساوی (۱) به‌جای AM و MN مساوی آنها $MN=B'C'$ و $B'C'$ را قرار دهیم خواهیم داشت : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$.

(۵) **تعمیم قضیهٔ قبل** ـ هرگاه چند خط موازی دریک‌صفحه دوخط مورب را قطع کنند، قطعات متناظر جدا شده از دوخط مورب متناسبند .



اثبات به‌سادگی ازقضیه پیش نتیجه می‌شود.

مسئله ـ درشکل مقابل خط DE موازی BC رسم شده است . اگر $AD=۶$ و $BD=۱۰$ و $AC=۲۰$ باشد، اندازه‌های AE و EC را حساب کنید.



حل ـ داریم :

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \quad \text{یا} \quad \frac{۶}{۱۶}=\frac{AE}{۲۰}$$

و از آنجا داریم :

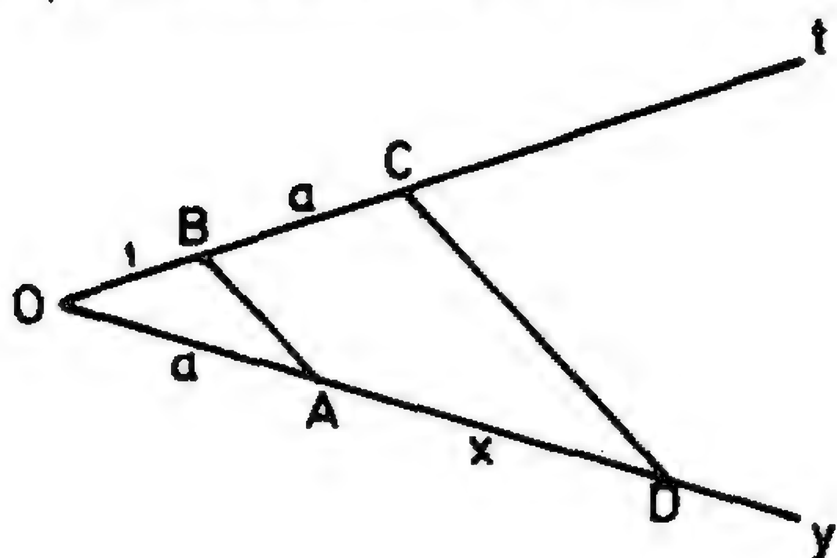
$$AE=۷/۵ \quad \text{و} \quad EC=۱۲/۵$$

مسئله ـ پاره‌خطی بـه طول a معلوم است .

اولا تساوی $x=a^۲$ را به‌یك تناسب تبدیل‌کنید .

ثانیاً به‌کمك ترسیم پاره‌خط به‌طول x را تعیین‌کنید.

حل ـ اولا تساوی $x=a^2$ را به‌صورت $x\times 1=a\times a$ نوشته‌سپس‌می‌نویسیم $\frac{a}{1}=\frac{x}{a}$.



ثانیاً بـرای تعیین اندازهٔ x در روی دونیم خط دلخواه Oy و Ot (مطابق شکل) طولهای OA ، OB و BC را به اندازه‌های a ، ۱ و a جدا می‌کنیم و دو نقطهٔ A و B را به هم وصل می‌کنیم و از نقطهٔ C خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا Oy را در نقطهٔ D قطع کند ، پاره‌خط AD جواب مسئله است . زیرا داریم

$$\frac{OA}{OB}=\frac{AD}{BC}$$

یا

$$\frac{a}{1}=\frac{AD}{a}$$

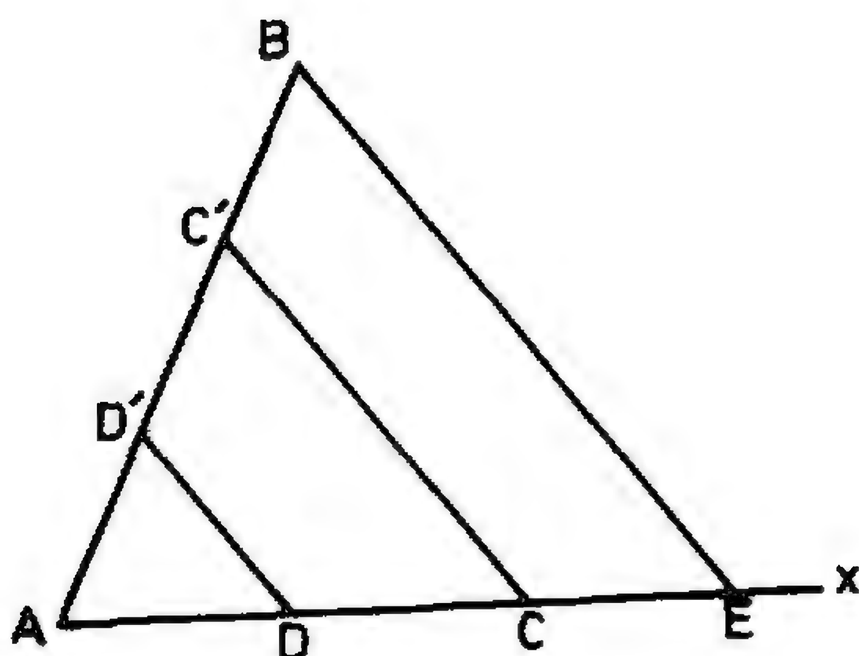
یا

$$AD=a^2$$

در نتیجه

$$x=a^2$$

مسئله ـ می‌خواهیم پاره‌خط AB را به سه‌قسمت مساوی تقسیم کنیم .



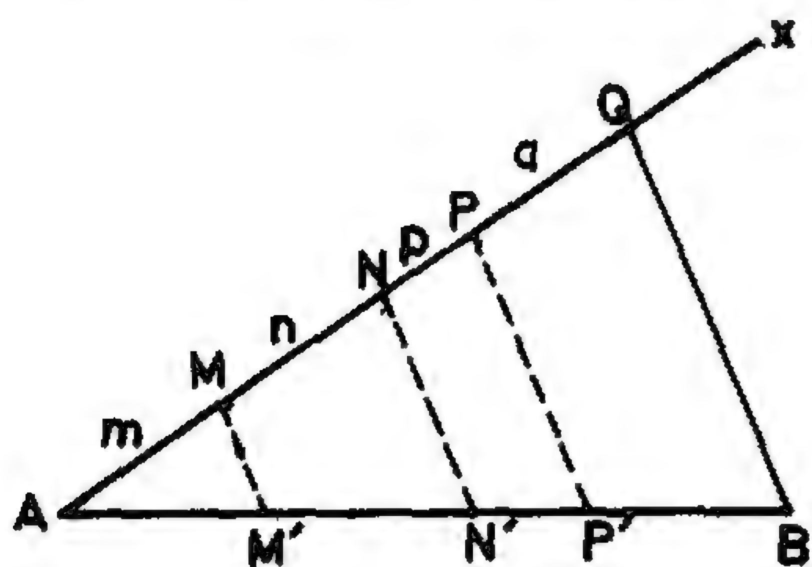
حل ـ ازنقطهٔ A (شکل مقابل) نیم‌خطی‌مانند Ax رسم می‌کنیم و در روی آن سه پاره‌خط متوالی

$$AD=DC=CE$$

را جدا می‌کنیم، سپس از E به B وصل می‌کنیم‌وخطوط CC' و DD' را موازی BE رسم می‌کنیم تـا پاره‌خط AB را در نقاط C' و D' قطع کنند . در این صورت پاره‌خط AB بـه وسیلهٔ نقاط C' و D' به سه قسمت مساوی تقسیم می‌شود (چرا ؟) .

مسئله ـ می‌خواهیم پاره‌خط مفروضی را به‌چند جزءکه اندازه‌های آنها متناسب با اعداد داده شده باشد تقسیم کنیم .

حل ـ در شکل مقابل فرض‌می‌کنیم می‌خواهیم‌پاره‌خط AB را به‌چهارقسمت‌متناسب با اعداد m ، n ، p و q تقسیم کنیم ؛



برای‌این‌تقسیم‌ازنقطهٔ A نیم‌خط‌دلخواه Ax را رسم می‌کنیم و در روی آن پاره‌خطهای AM ، MN ، NP و PQ را به‌ترتیب‌مساوی m ، n ، p و q جدا می‌کنیم؛ خط BQ را رسم‌می‌کنیم و ازنقاط P ، N و M خطوطی‌موازی BQ رسم می‌کنیم، این‌خطوط پاره‌خط AB را در نقاط P′ ، N′ و M′ قطع مـی‌کند و پـاره‌خطهای AM′ و M′N′ و N′P′ و P′B جوابهای مسئله هستند ، زیرا چند خط موازی دوخط مورب را قطع کرده‌اند وقطعات جدا شده از دوخط مورب متناسبند ، یعنی :

$$\frac{AM'}{AM}=\frac{M'N'}{MN}=\frac{N'P'}{NP}=\frac{P'B}{PQ}$$

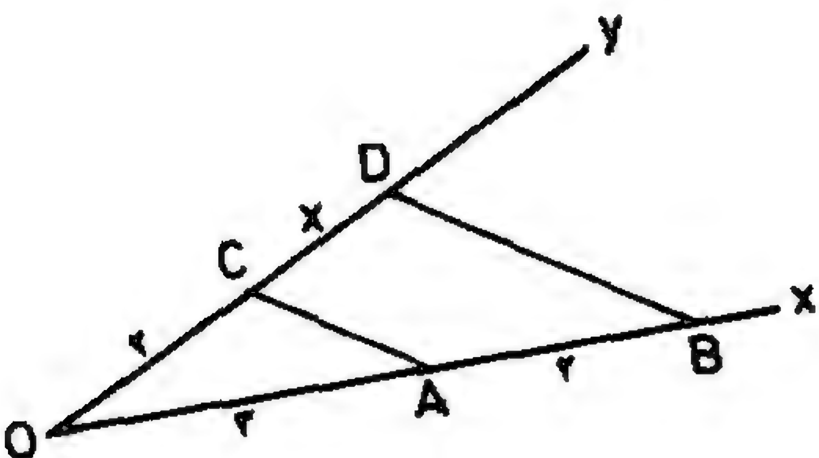
یا

$$\frac{AM'}{m}=\frac{M'N'}{n}=\frac{N'P'}{p}=\frac{P'B}{q}$$

یعنی پاره‌خطهای AM′ ، M′N′ ، N′P′، P′B به‌ترتیب با اعداد m، n ، p و q متناسبند.

مسئله ـ پاره‌خطی به‌طول x پیدا کنید به‌طریقی‌که پاره‌خط به‌طول ۲ واسطهٔ هندسی بین دوپاره‌خط به‌طولهای ۳ و x باشد ، یعنی بین پاره‌خطها رابطهٔ $\frac{۳}{۲}=\frac{۲}{x}$ برقرار باشد .

حل ـ در روی نیم‌خط Ox پاره‌خطهای OA و AB را بـه ترتیب مساوی ۳ و ۲ و در روی نیم‌خط Oy پاره‌خط OC را مساوی ۲ جدا می‌کنیم (مطابق شکل) . از A به C وصل می‌کنیم وازنقطهٔ B خط BD را موازی AC رسم می‌کنیم ، پاره‌خط CD جواب مسئله است . زیرا داریم :



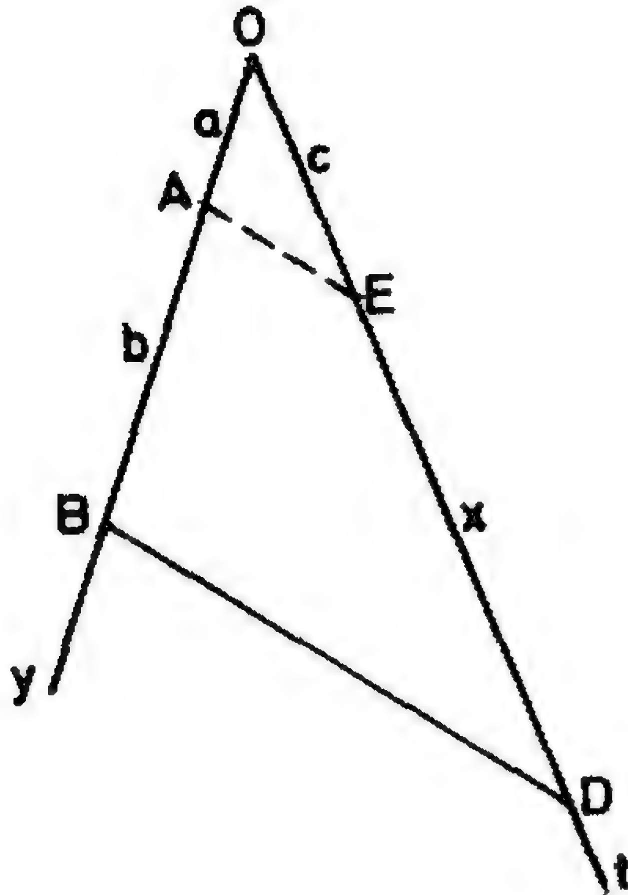
$$\frac{OA}{OC}=\frac{AB}{CD}$$

یا

$$\frac{۳}{۲}=\frac{۲}{CD}$$

و درنتیجه $CD=x$ جواب مسئله است .

مسئله ــ رسم چهارم جزء تناسب ــ سه پاره‌خط به اندازه‌های a ، b و c داده شده‌اند . می‌خواهیم پاره‌خطی به‌طول x رسم‌کنیم به‌طریقی که داشته‌باشیم: $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$.



حل ــ دونیم خط Oy و Ot را به‌طور دلخواه رسم می‌کنیم (مطابق شکل). در روی Oy طولهای OA و AB را به ترتیب به اندازه‌های a و b و در روی Ot پاره‌خط $OE=c$ را جدا می‌کنیم؛ خطی از A به E رسم می‌کنیم و از B خطی موازی AE می‌کشیم تا Ot را درنقطهٔ D قطع کند، پاره‌خط ED جواب مسئله است ، زیرا دوخط AE و BD با هم موازیند و درنتیجه :

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OE}{ED}$$

یا

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{ED}$$

یعنی پاره‌خط ED همان پاره‌خط x می‌باشد .

تمرین

۱ـ آیا گزاره زیر درست است . ؟

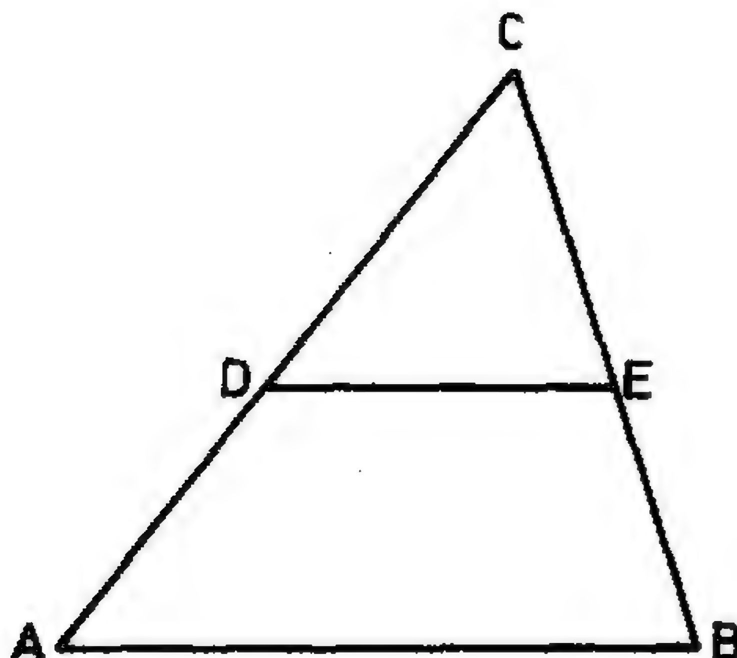
اگر در روی ضلع AB از مثلث ABC پاره‌خط AB' را به اندازهٔ نصف AC و در روی ضلع AC پاره‌خط AC' را به اندازهٔ نصف AB جداکنیم ، خط $B'C'$ موازی BC است.

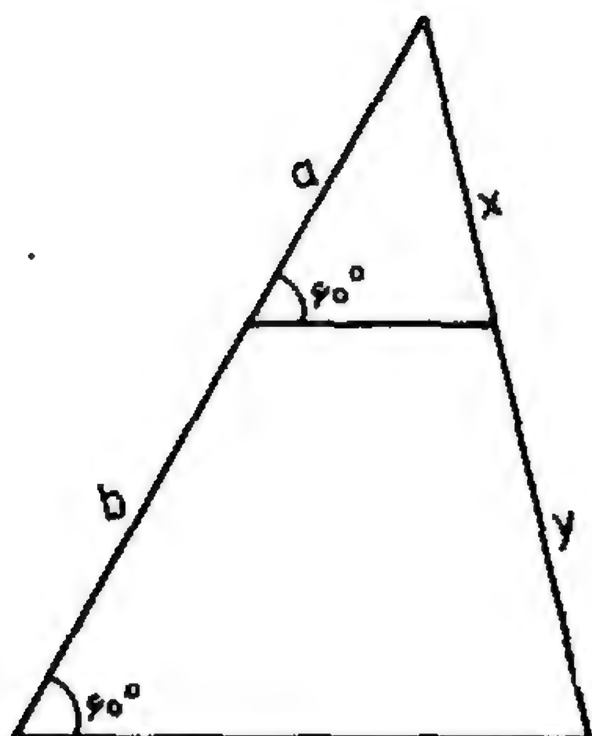
۲ ــ در شکل مقابل $AB \| DE$ است ، تناسبهای زیر را کامل‌کنید :

الف) $\frac{EB}{EC}=\frac{?}{?}$ ، ب) $\frac{CA}{CD}=\frac{?}{?}$ ،

ج) $\frac{CA}{DA}=\frac{?}{?}$ ، د) $\frac{CE}{CD}=\frac{?}{?}$ ،

ه) $\frac{CD}{DA}=\frac{?}{?}$ ، و) $\frac{BE}{AD}=\frac{?}{?}$.





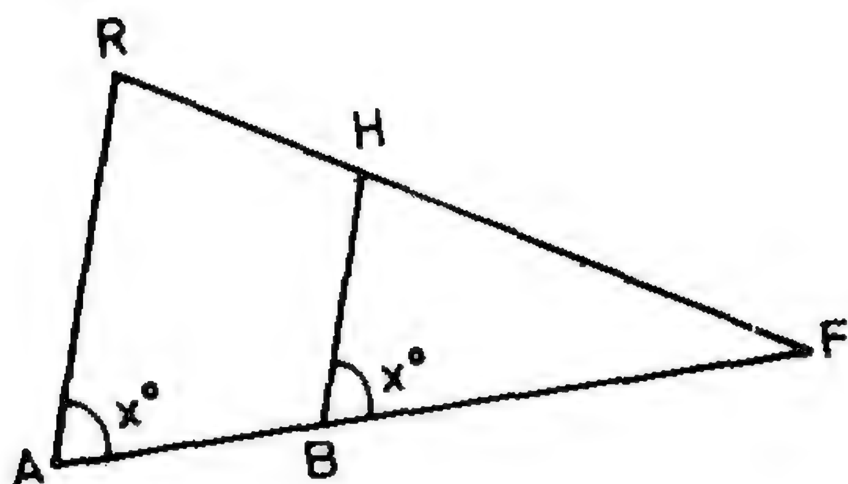
۳ ـ با توجه بـه شکل مقابل تناسبهای زیر را کامل کنید:

الف) $\frac{a+b}{a}=\frac{?}{x}$ ،

ب) $\frac{a}{b}=\frac{?}{?}$ ، ج) $\frac{a+b}{x+y}=\frac{?}{x}$ ،

د) $\frac{a}{x}=\frac{?}{?}$ ، هـ) $\frac{a+b}{b}=\frac{x+?}{?}$

و) $\frac{x+y}{a+b}=\frac{y}{?}$.

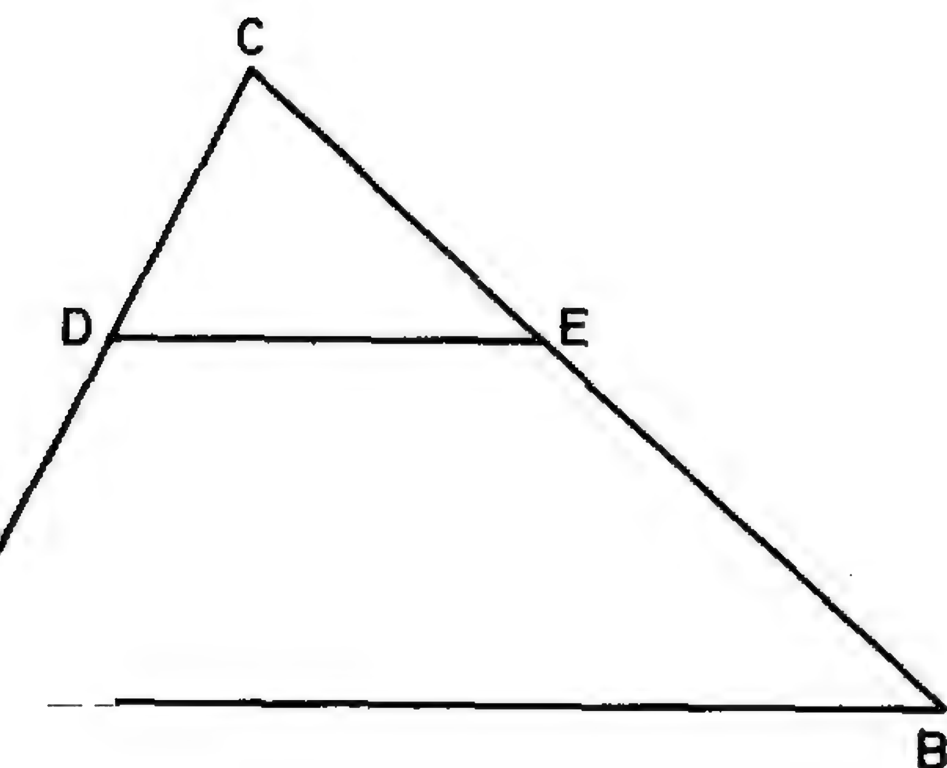


۴ـ با توجه به‌شکل روبه‌رو

الف) اگر $RH=۴$ و $FH=۶$ و $BF=۱۰$ باشد، AB راحساب کنید.

ب) اگر $RH=۶$ و $HF=۱۰$ و $AB=۳$ باشد ، BF را حساب کنید.

ج) اگر $RH=۵$ و $RF=۲۰$ و $AF=۱۸$ باشد، BF را تعیین کنید.



۵ـ در شکل مقابل $AB\|DE$ می‌باشد .

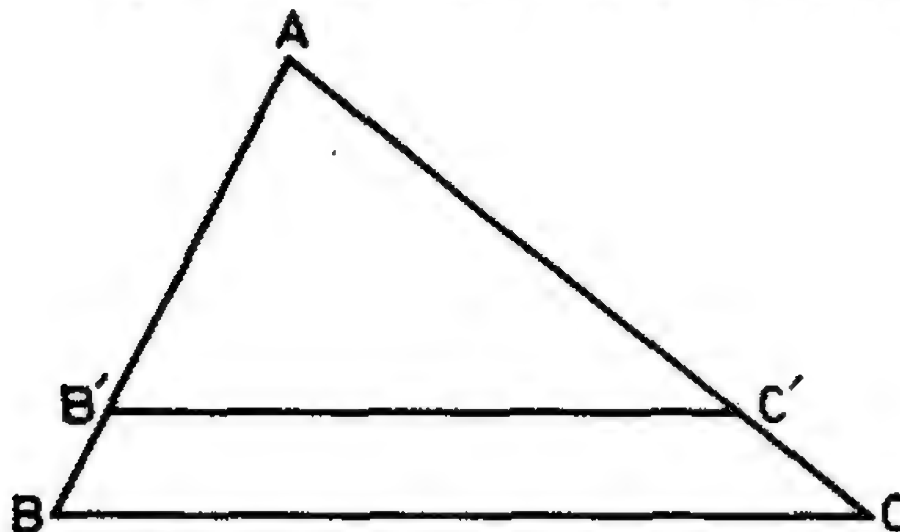
الف)اگر $AC=۱۲$ و $CD=۴$ و $CE=۸$ باشد، BC را حساب کنید.

ب) اگر $AD=۶$ و $BE=۱۰$ و $CD=۴$ باشد ، CE را پیدا کنید .

ج) اگر BC=۲۲ و BE=۶ و CD=۸ باشد، AC را تعیین کنید.

د) اگر AD=۵ و CD=۷ و BC=۱۸ باشد، BE را معلوم کنید.

ه) اگر AC=۱۵ و CE=۶ و BC=۱۸ باشد، AD را به دست آورید.



۶- در شکل روبه‌رو داریم:
$AB=۲۰$ ، $AB'=۱۶$ ،
$AC=۳۰$ و $AC'=۲۳$.
آیا $BC \| B'C'$ است.

۷- با توجه به شکل مقابل، در کدام یک از حالات زیر $BC \| FG$ است.

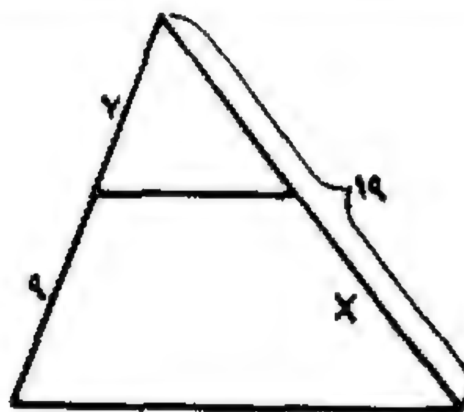
الف) AB=۱۴ و AF=۶ و AC=۷ و AG=۳

ب) AB=۱۲ و FB=۳ و AC=۸ و AG=۶

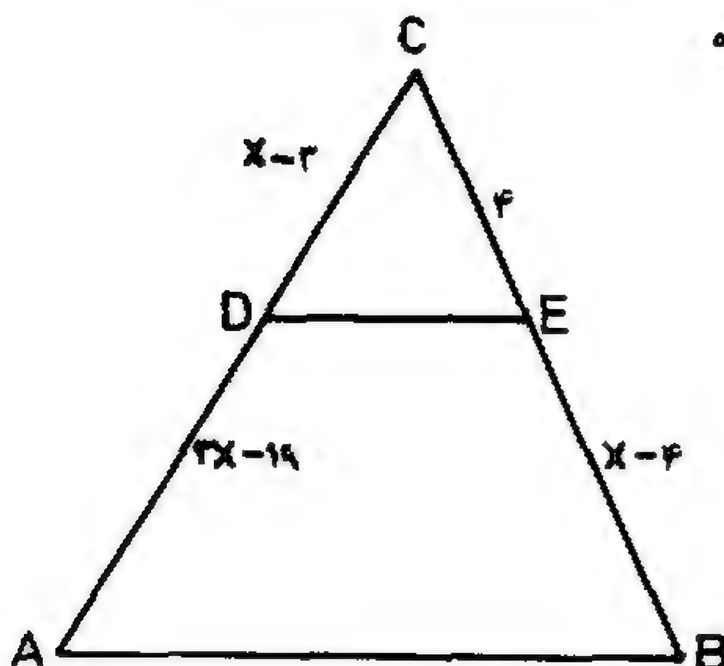
ج) AF=۶ و FB=۵ و AG=۹ و CG=۸

د) AC=۲۱ و CG=۹ و AB=۱۴ و AF=۵

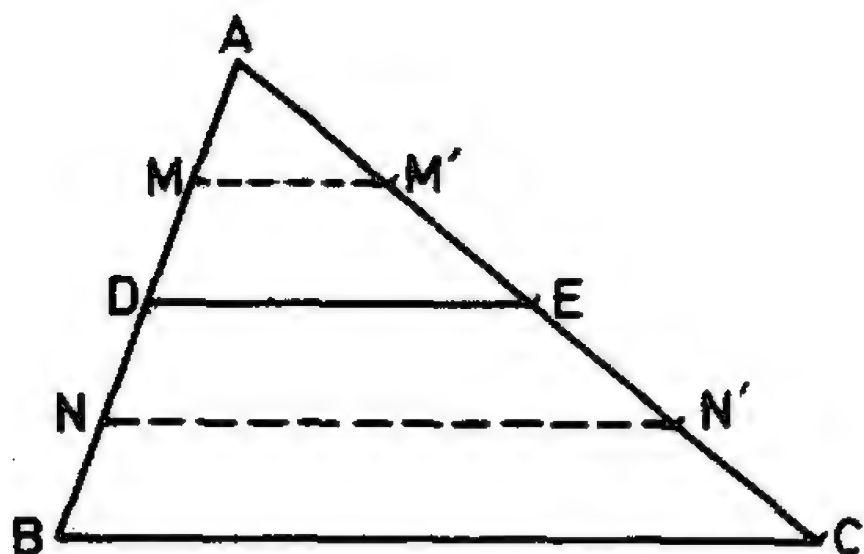
ه) AB=۲۴ و AC=۶ و AF=۸ و CG=۴



۸ ـ با توجه به شکل مقابل، آیا می‌توان برای محاسبهٔ x از تناسب $\frac{۷}{۹}=\frac{۱۹-x}{x}$ استفاده کرد؟ اگر ممکن است مقدار x را حساب کنید.

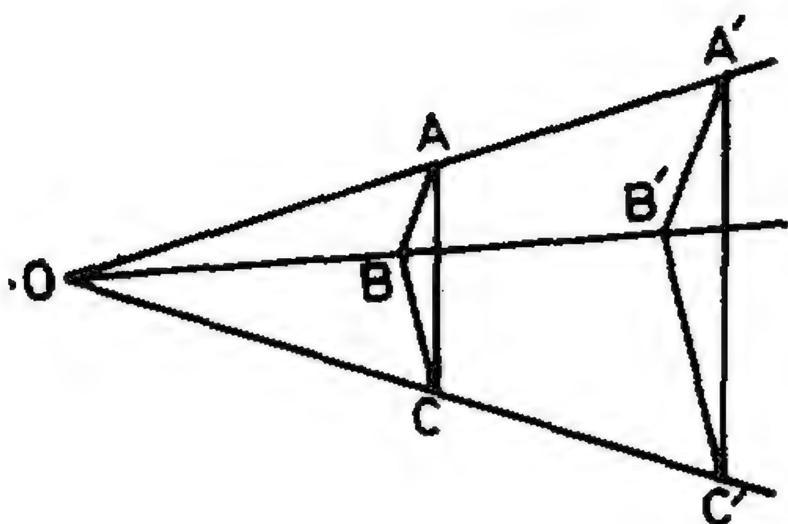


۹ ـ در شکل مقابل $AB \| DE$ است. درصورتی که $CD=x-۳$ و $CE=۴$ و $DA=۲x-۱۹$ و $EB=x-۴$ باشد، مقدار x را تعیین کنید.

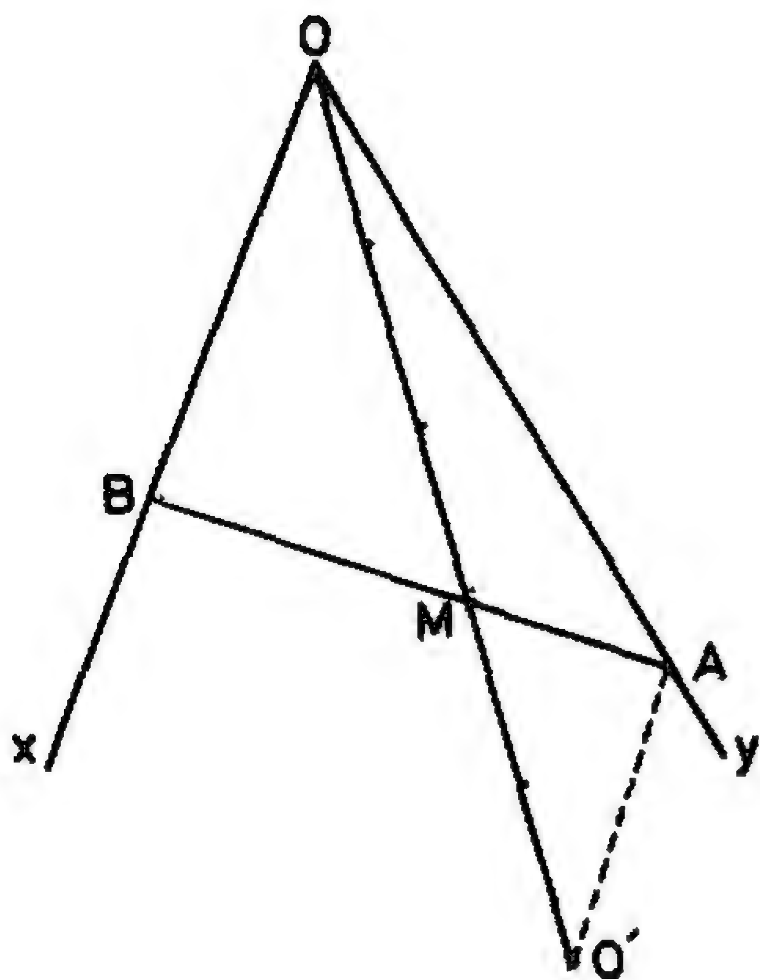


۱۰ ـ در شکل مقابل نقطهٔ D وسط AB و DE||BC می‌باشد.
اولاً ثابت کنید نقطهٔ E وسط AC است.
ثانیاً اگر نقطهٔ M وسط AD و نقطهٔ N وسط DB و MM'||NN'||BC باشند، ثابت کنید:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AM'}{M'C}=\frac{NB}{NA}=\frac{N'C}{N'A}$$



۱۱ـ دومثلث ABC و A'B'C' طوری قرار گرفته‌اند که AA' و BB' و CC' یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کرده‌اند و AB||A'B' و BC||B'C' (مطابق شکل) ثابت کنید AC||A'C'.



۱۲ـ می‌خواهیم ازنقطهٔ M واقع در درون‌زاویهٔ xOy پاره‌خطی محدود به‌دونیم‌خط Ox و Oy بگذرانیم که در نقطهٔ M به نسبت $\frac{۳}{۲}$ تقسیم شود یعنی $\frac{MB}{MA}=\frac{۳}{۲}$ (مطابق شکل).

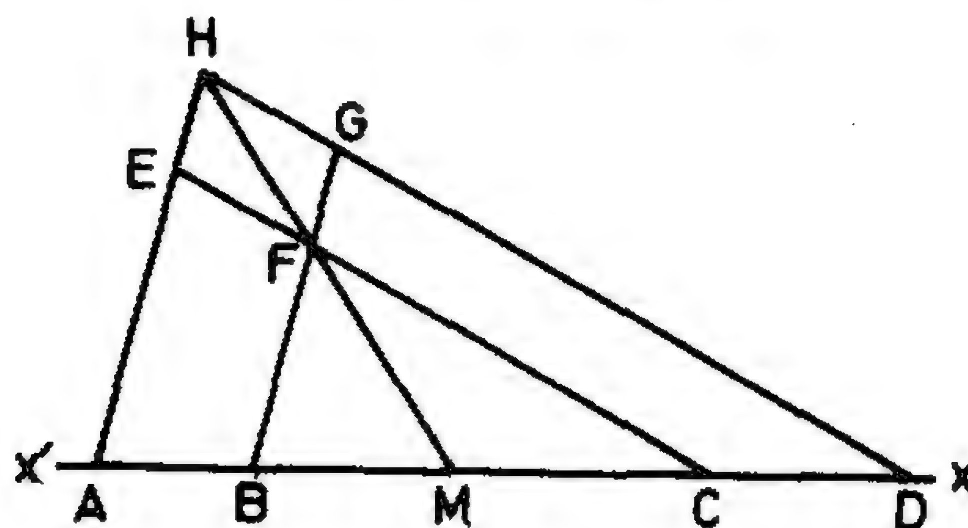
حل ـ ابتدا نقطهٔ M را به‌نقطهٔ O وصل می‌کنیم و پاره‌خط OM را به سه‌قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم؛ سپس پاره‌خط MO' رادرامتداد OM به‌اندازهٔ $\frac{۲}{۳}$ پاره‌خط OM جدا کرده از نقطهٔ O' خطی موازی Ox می‌کشیم تا Oy را درنقطهٔ A قطع کند؛ از A به M وصل می‌کنیم، امتداد AM نیم‌خط Ox را در نقطهٔ B قطع می‌کند و خط AB که از نقطهٔ M گذشته

است جواب مسئله است. زیرا درمثلث MOB خط O′A موازی OB رسم شده‌است وبنا به‌قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{MB}{MA}=\frac{MO}{MO'} \quad \text{یا} \quad \frac{MB}{MA}=\frac{۳}{۲}$$

۱۳- نقاط A و B و C و D روی خط x′x مطابق شکل اختیار شده‌اند؛ دوخط موازی از نقاط B و A و دو خط موازی دیگر از نقاط C و D رسم نموده‌ایم ، از تقاطع آنها متوازی‌الاضلاعEFGH حاصل شده است؛ امتداد FH خط x′x را درنقطهٔ M قطع نموده است؛ ثابت کنید :

$$MA \cdot MC = MB \cdot MD .$$

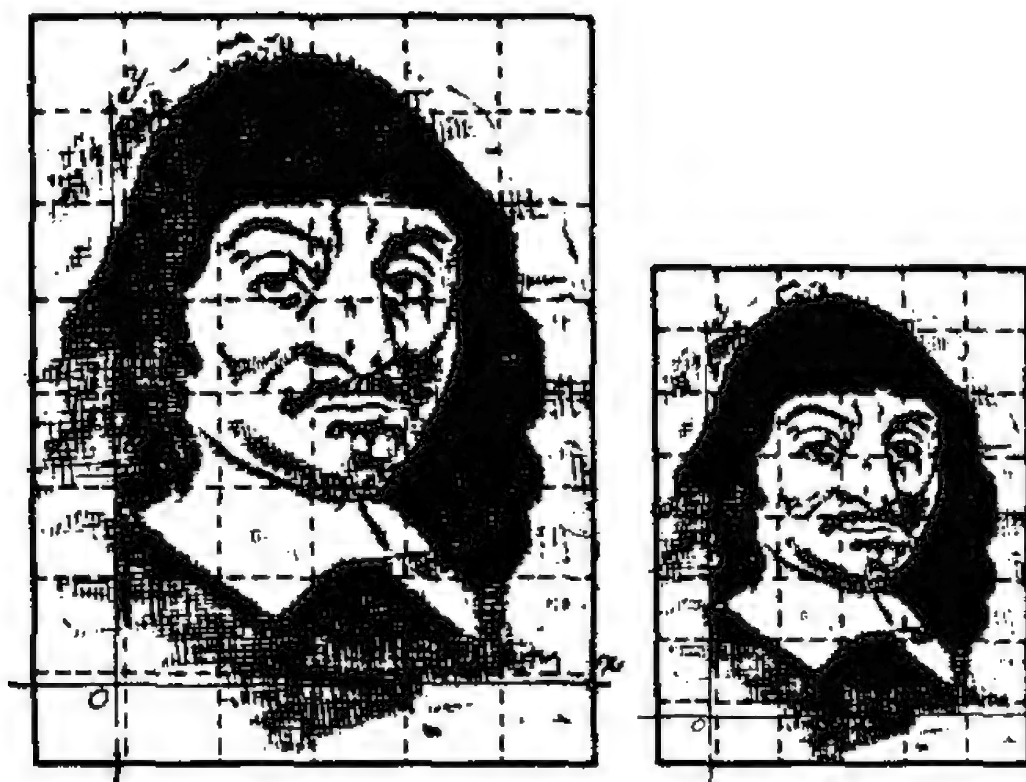


فصل ۲

تشابه اشکال

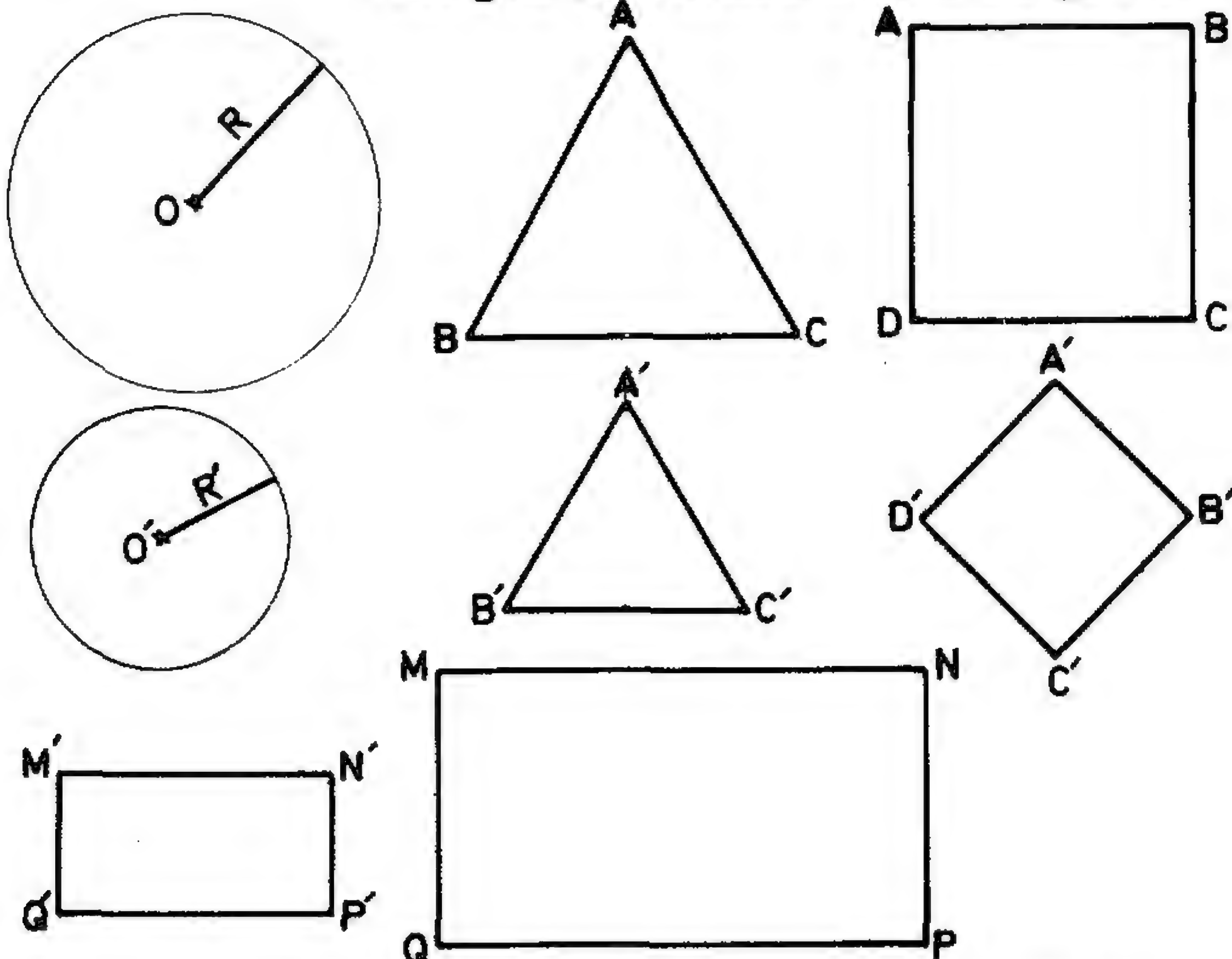
کلیات تشابه

تعریف ـ کلمهٔ تشابه در زندگی روزانهٔ ما بدون رعایت و توجه به تعریف ریاضی آن موارد استعمال فراوان‌دارد، گاهی هم اتفاق‌می‌افتدکه طبیعت یا خلقت به‌کمك این‌کلمه می‌آید، مثلا وقتی‌که دوبرادر را که خیلی به‌هم شبیه هستند و درکنار‌هم می‌بینیم بی‌اختیار می‌گوییم چه تشابه عجیبی ! تشابه را با تمام ویژگیهای آن در دوعکس کوچك و بزرگی که از خود در دست دارید بهتر درك می‌کنید . عکسی ازخود را دوبرابر بزرگ‌کنید، می‌بینید تمام خطوط عکس بزرگ دوبرابر خطوط متناظر درعکس‌کوچك است و زوایای بین خطوط متناظر دوعکس با هم مساویند ، مثلا اندازهٔ ابروها وبینی درعکس بزرگ دوبرابر اندازهٔ ابروها وبینی درعکس کوچك است ولی مثلا زاویهٔ بین‌خط بینی وامتداد ابروها درهردوعکس به‌یك‌اندازه است‌که این زاویه معمولا در حدود °۹۰ است . به این دو تصویر از دکارت که به اندازه‌های مختلف است دقت کنید ، ترکیب چشم و ابرو و بینی و دهان و تناسب بین بزرگی و کوچکی فاصله‌های مختلف در هردوصورت یکی است و تفاوت فقط در اندازه‌های آنهاست ، ولی نسبت

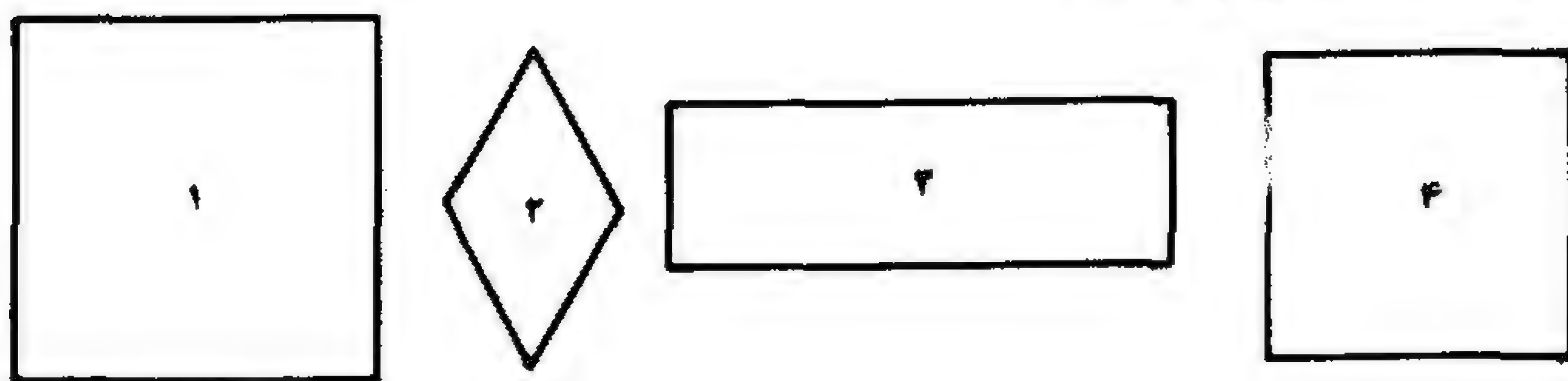


اندازه‌های طولهای متناظر یکی است و زوایای بین خطوط متناظر دو تصویر دو به‌دو با هم مساوی است .

حال به‌اشکال هندسی زیردقت نمایید: دودایرهٔ به‌مرکزهای O و 'O و به‌شعاعهای R و 'R ، دومثلث ABC و 'A'B'C ، دومربع ABCD و 'A'B'C'D ، دومستطیل MNPQ و 'M'N'P'Q اشکال هندسی هستندکه از حیث ساختمان با یکدیگر تفاوتی ندارند .

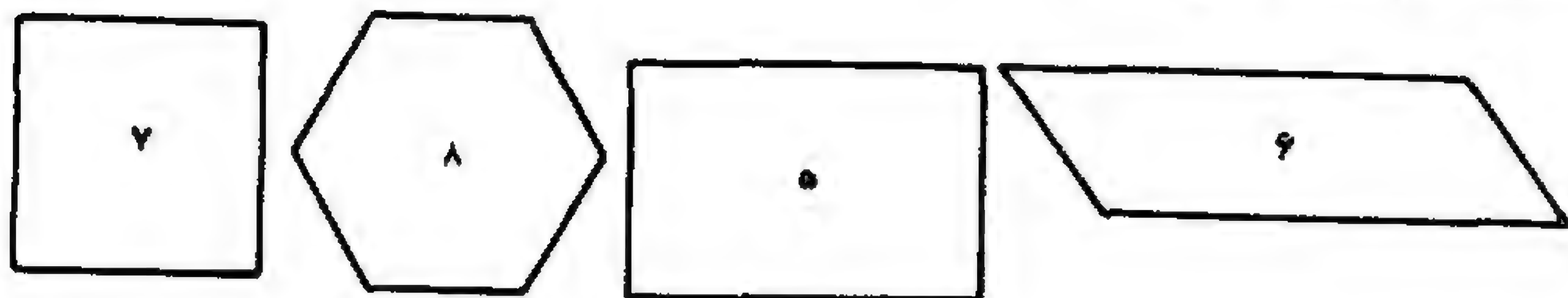


بدین معنی‌که مثلا دو دایره از همه لحاظ با هم شبیه هستند، فقط یکی بزرگتر از دیگری است.همچنین‌دومربع‌را اگر درنظر بگیریم‌ازتمام‌جهات با یکدیگر یکی‌هستند فقط یکی کوچکتراز دیگری می‌باشد. اگر به‌دومثلث یا به‌دومستطیل که درشکلهای فوق‌مشاهده می‌شوند توجه‌کنیم متوجه می‌شویم که تفاوت آنها فقط در انــدازهٔ اضلاع متناظر آنهاست ولی زاویه‌های متناظر آنها با هم مساوی می‌باشند .



حال اگر به شکلهای (۱ , ۲) و (۳ , ۴) دقت‌کنیم ، خواهیم دیدکه ساختمان شکلهای (۱ , ۲) با هم ونیز ساختمان شکلهای (۳ , ۴) با هم تفاوت دارد. مثلا اضلاع مربع دوبرابر

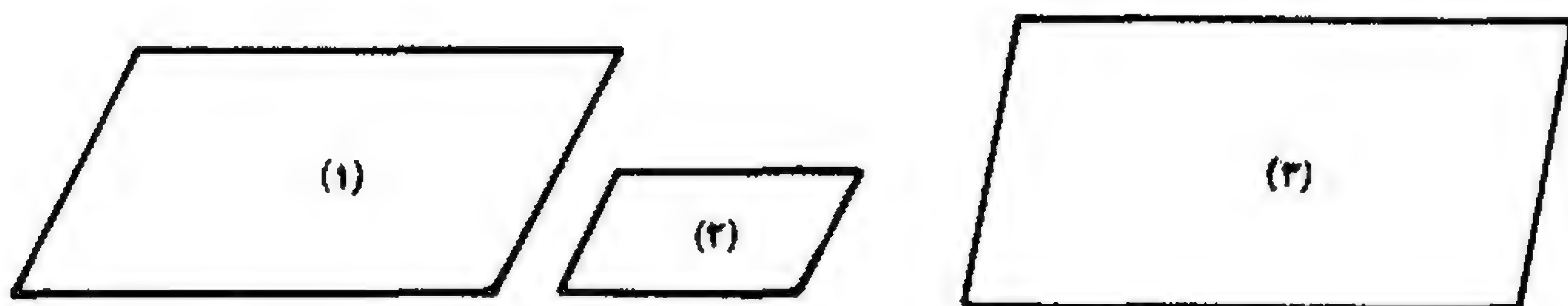
اضلاع لوزی است، بنابراین اضلاع شکلهای (۱ , ۲) متناسب‌هستند ولی زاویه‌های آنها با هم مساوی‌نیستند. همچنین زاویه‌های شکلهای (۳ , ۴) نظیر به‌نظیر با هم مساوی است ولی اضلاع آنها با هم متناسب نمی‌باشند .



اگر به‌شکلهای (۵ , ۶) و (۷ , ۸) دقت نمایید ملاحظه می‌شود که ساختمان آنها باهم یکی نمی‌باشد .

بنابراین شکلهای (۱ , ۲) و (۳ , ۴) و (۵ , ۶) و (۷ , ۸) هیچ‌کدام با دیگری متشابه نیست .

حال بـه سه متوازی‌الاضلاع (۱) و (۲) و (۳) زیر تـوجه کنید . دو متوازی‌الاضلاع



(۱) و (۲) ازحیث‌ساختمان یکی‌هستند بدین معنی‌که متوازی‌الاضلاع (۲) همان‌متوازی‌الاضلاع (۱) است که اضلاع آن به‌یك نسبت‌کوچك شده است (هرکدام از اضلاع نصف‌اضلاع متناظرش می‌باشد) .

ولی‌متوازی‌الاضلاع(۳)باهیچ‌یك‌ازدومتوازی‌الاضلاع‌دیگراز حیث ساختمان یکی نیست . زیرا علاوه برآن‌که تناسبی بین‌اضلاع متوازی‌الاضلاع (۳) با اضلاع متناظر دومتوازی‌الاضلاع (۱) و (۲) وجود ندارد زاویه‌های آنها هم مساوی نیستند (هریك از این دو اختلاف جداگانه برای آن‌که دوشکل متشابه نباشند کافی است) .

حال‌که به‌کمك مثالهای فوق مفاهیمی از تشابه به دست آمد ، اکنون به‌تعریف وتوضیح علمی آن می‌پردازیم .

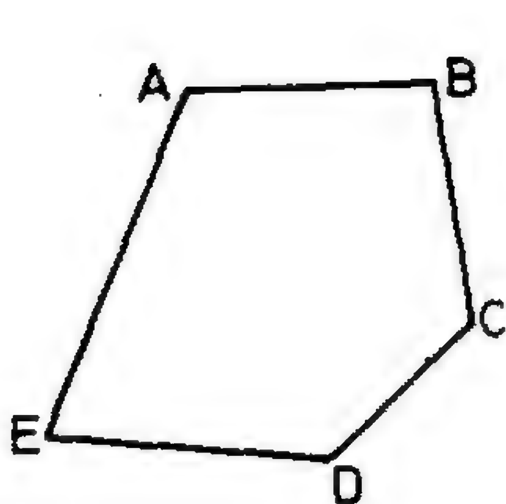
تشابه چندضلعیها

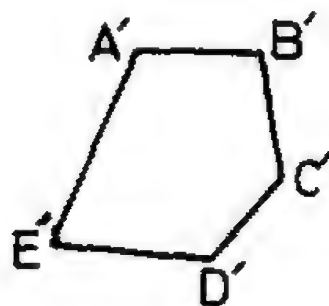
دو n ضلعی‌را متشابه‌گوییم‌هرگاه‌بتوان آن‌دورا به‌صورتهای ABCD…K و A′B′C′D′…K′ چنان نامگذاری‌کرد که دو شرط زیر برقرار باشند :

$\angle A=\angle A'$ ، $\angle B=\angle B'$ ، $\angle C=\angle C'$ و ... و $\angle K=\angle K'$ (الف)

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}= \dots =\frac{KA}{K'A'} \quad \text{(ب)}$$

مثلا دوپنج ضلعی ABCDE و A'B'C'D'E' متشابهند درصورتی که :





$\angle A=\angle A'$

$\angle B=\angle B'$

$\angle C=\angle C'$

$\angle D=\angle D'$

$\angle E=\angle E'$

باشند و

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'E'}{DE}=\frac{E'A'}{EA}$$

نسبت اضلاع‌متناظر یعنی $\frac{A'B'}{AB}$ یا $\frac{AB}{A'B'}$ را نسبت تشابه دوچند ضلعی می‌نامند .

به‌طورکلی اگر F و F' دوشکل‌متشابه باشند چنین می‌نویسند: $F\sim F'$ وچنین‌می‌خوانند: شکل F متشابه است با شکل F' .

ازتعاریف بالا چنین برمی‌آیدکه :

الف ـ هر شکل با خودش متشابه است $F\sim F$

ب ـ اگر $F\sim F'$ باشد ، نتیجه می‌شودکه $F'\sim F$

ج ـ از $F\sim F'$ و $F'\sim F''$ نتیجه می‌شودکه $F\sim F''$.

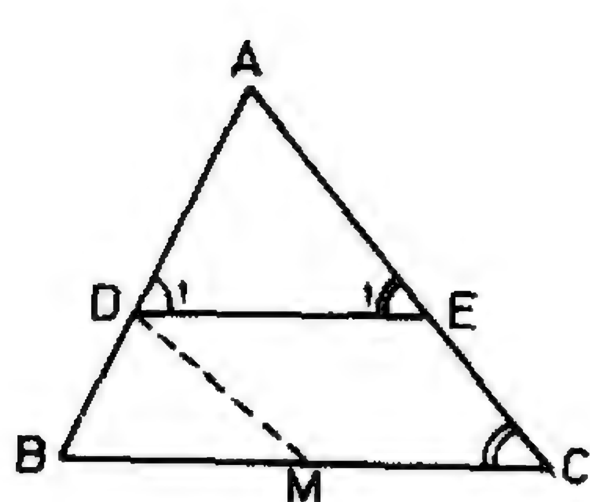
تشابه دومثلث

می‌دانیم وقتی کـه دو مثلث مساوی باشند ، سه ضلع و سه زاویهٔ دومثلث نظیر به‌نظیر مساویند. ولی به‌علت ویژگیهای مثلث دیده‌ایم‌که اگر بعضی‌از اجزای دومثلث مساوی‌باشند سایر اجزا خود به‌خود نظیر به‌نظیر مساوی می‌شوند. ازآن جمله ثابت شده است‌که مثلا برای تساوی دو مثلث کافی است‌که دوضلع و زاویهٔ بین این دوضلع از یك مثلث با دو ضلع و زاویهٔ بین‌این‌دوضلع‌ازمثلث‌دیگر نظیر به‌نظیر مساوی‌باشند. درتشابه دومثلث نیز به‌خاطر ویژگیهای آن خواهیم‌دیدکه‌لازم‌نیست‌هردوشرط‌تشابه یکجاوجود داشته‌باشد، بدین‌معنی که‌وجود یکی‌ازدوشرط، یا قسمتی از هردو شرط کفایت می‌کند که به صورت قضیه‌های تشابه دومثلث بیان می‌شوند ،

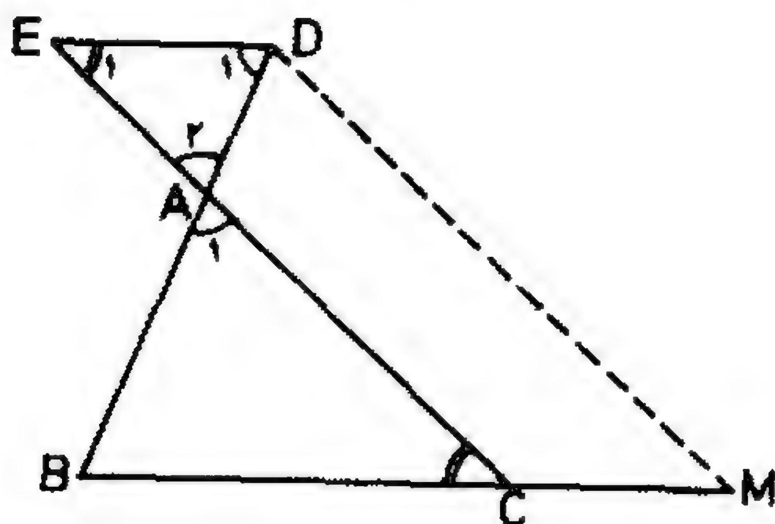
ولی قبل از عنوان قضیه‌های تشابـه دو مثلث به اثبات قضیه زیر کـه آن را قضیهٔ اصلـی تشابه می‌نامیم می‌پردازیم :

قضیهٔ اصلی تشابه دومثلث ـ خطی که موازی یك‌ضلع مثلثی رسم شود ، دوضلع دیگر (یا امتداد آنها) را قطع مـی‌نماید و مثلثی پدید می‌آورد که با مثلث اصلی متشابه است .

برهان ـ در شکلهای (۱) و (۲) خط DE موازی ضلع BC رسم شده است ، و اضلاع AB و AC را درشکل (۱) و امتداد آنها را در شکل (۲) قطع نموده است، می‌خواهیم ثابت کنیم دو مثلث ABC و ADE متشابهند ، یعنی بـاید برقراری دو شرط تشابه ، کـه زاویه‌ها نظیر به‌نظیر مساوی و اضلاع نظیر به‌نظیر متناسبند ، ثابت شود.



ش (۱)



ش (۲)

در شکل (۱) زاویهٔ A درهردو مثلث مشترك است و درشکل (۲) $\angle A_1 = \angle A_2$ چون دو زاویهٔ متقابل به‌رأس هستند ؛ و $\angle B = \angle D_1$ و $\angle C = \angle E_1$ (دلیل مساوی بودن این زاویه‌ها را درهر دوشکل بیان کنید).

بنابراین زاویه‌های دومثلث ABC و ADE نظیر به‌نظیر مساویند (یك‌شرط تشابه) . حال خط DM را موازی AC رسم می‌نماییم ، در مثلث ABC بنابرقضیهٔ تالس داریم :

$$(۱) \quad \frac{AD}{AB} = \frac{MC}{BC}$$

چون MC مساوی DE است (چرا ؟) پس رابطهٔ (۱) به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$(۲) \quad \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

از طرفی چون DE موازی BC است ، بنا به‌قضیهٔ تالس داریم :

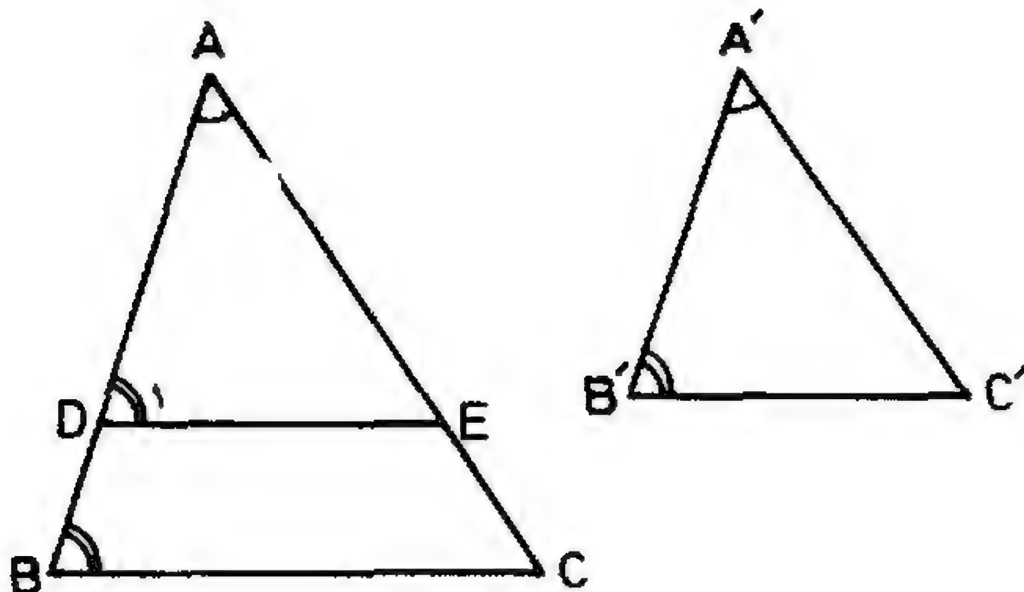
$$(۳) \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

از تساویهای (۲) و (۳) نتیجه می‌شود :

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$$ (شرط دیگر تشابه)

یعنی اضلاع دو مثلث ADE و ABC نظیر به‌نظیر متناسبند ، بنابراین دومثلث مذکور متشابه می‌شوند .

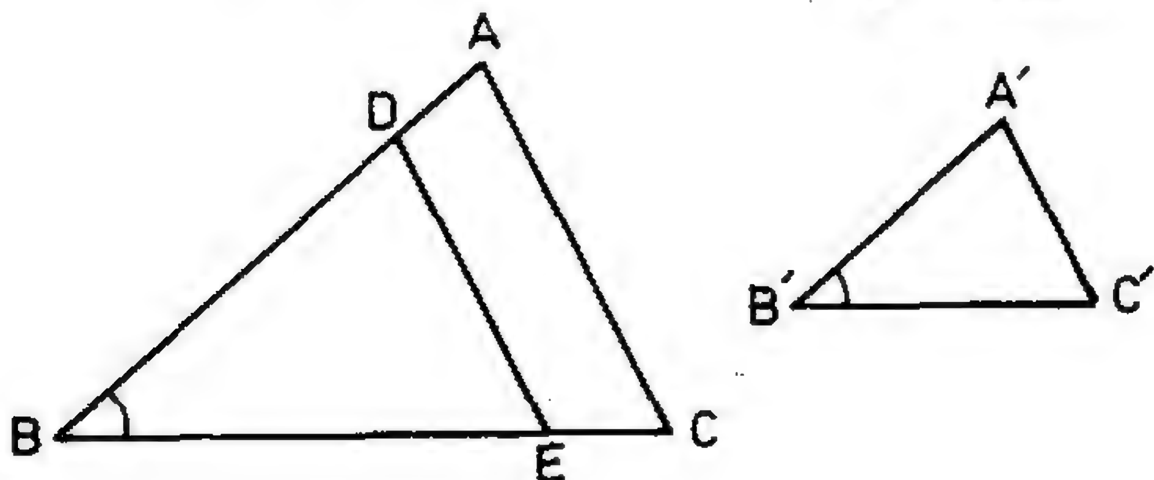
قضیه ـ هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشند ، دو مثلث متشابهند .



در شکل مقابل به‌فرض $\angle A=\angle A'$ و $\angle B=\angle B'$ ،می‌خواهیم ثابت کنیم $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

برهان ـ در روی ضلع AB ازمثلث ABC پاره‌خط AD را مساوی $A'B'$ جدا مـی‌کنیم و از نقطهٔ D خط DE را مـوازی BC رسم مـی‌کنیم ؛ چون بنابه‌فرض $\angle B=\angle B'$ و ازطرفی $\angle B=\angle D_1$ (چرا ؟)، پس $\angle D_1=\angle B'$ و درنتیجه دومثلث ADE و $A'B'C'$ در حالت (ز ض ز) با هم مساوی مـی‌شوند . چون DE موازی BC رسم شده است، بنابرقضیهٔ اصلی تشابه دومثلث ،دومثلث ADE وABC متشابهند و چون $\triangle ADE=\triangle A'B'C'$ پس $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ است .

قضیه ـ هرگاه دوضلع ازمثلثی با دوضلع ازمثلث دیگر نظیربه‌نظیر متناسب و زاویهٔ بین‌آنها مساوی باشند ، دومثلث متشابهند.



در شکل بالا به‌فرض :

$$\angle B=\angle B'$$

و

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$$

باید ثابت کنیم : $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

برهان ـ مثلث $A'B'C'$ را روی مثلث ABC قرار می‌دهیم به قسمی کـه زاویهٔ B' روی زاویهٔB که مساوی‌آن است قرارگرفته و به‌وضع جدید DBE درآید؛ حال‌کافی است ثابت‌کنیم مثلث DBE با مثلث ABC متشابه است . در فرض داریم :

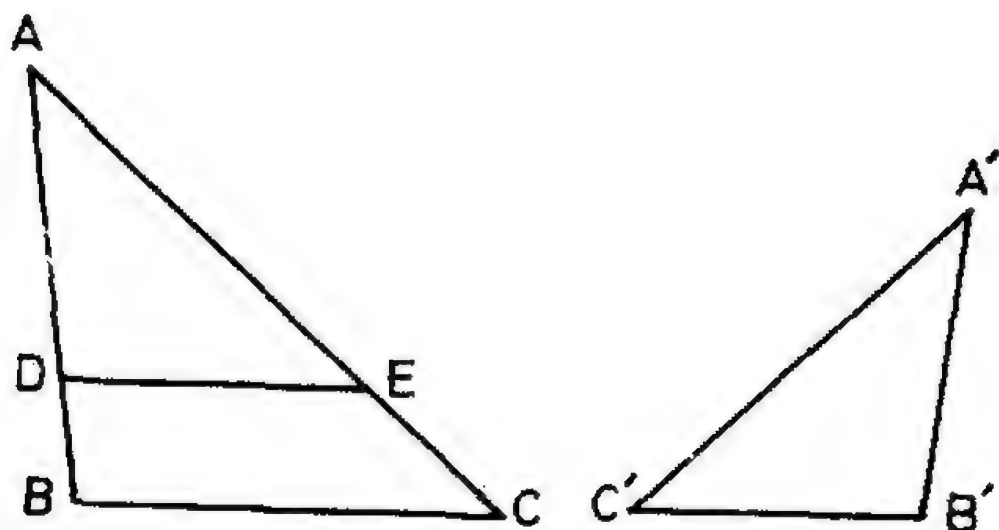
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$$

چون در این تساوی به جای $A'B'$ و $B'C'$ به‌ترتیب پاره‌خطهای BD و BE مساویهای آنها را قرار دهیم خواهیم داشت :

$$\frac{DB}{AB}=\frac{BE}{BC}$$

از این‌تناسب نتیجه می گیریم‌که بنا به‌عکس قضیهٔ تالس DE موازی AC است و دومثلث ABC و DBE بنابه‌قضیهٔ اصلی تشابه دومثلث‌متشابه می‌شوند وچون دومثلث BDE و $A'B'C'$ مساویند پس دومثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه می‌شوند .

قضیه ــ هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه‌ضلع از مثلث دیگر نظیر به‌نظیر متناسب باشند ، دومثلث متشابهند .



در شکل مقابل

به‌فرض داریم :

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$

باید ثابت کنیم :

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

برهان ــ در روی ضلعهای AB و AC ازمثلث ABC پاره‌خطهای AD و AE را به‌ترتیب مساوی $A'B'$ و $A'C'$ جدا نموده و دونقطهٔ D و E را به‌هم وصل می‌کنیم درفرض داریم :

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}$$

دراین‌تساوی‌به‌جای $A'B'$ و $A'C'$مساویهای‌آنها AD وAE راقرارمی‌دهیم،خواهیم‌داشت:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

پس بنا به‌عکس قضیهٔ تالس DE موازی BC می‌شود و در نتیجه بنا به قضیهٔ اصلی تشابه دومثلث ، دومثلث ADE و ABC متشابهند و داریم : $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

از مقایسهٔ این نسبتها با نسبتهای فرض قضیه نتیجه می‌شود که $DE=B'C'$ بنابراین دو مثلث ADE و $A'B'C'$ در حالت (ض ض ض) با هم مساویند و چون $\triangle ADE \sim \triangle ABC$، پس $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

تشابه دومثلث قائم‌الزاویه

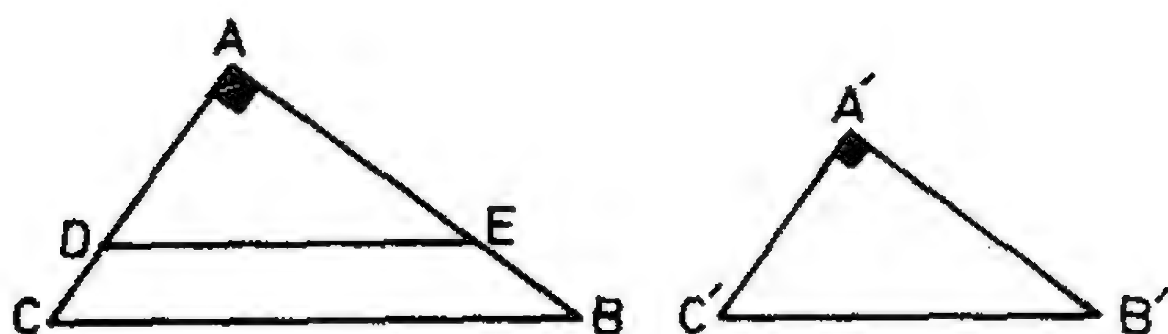
قضیه ـ اگر یک‌زاویهٔ حاده ازیک‌مثلث قائم‌الزاویه با یک‌زاویهٔ حاده ازمثلث‌قائم‌الزاویهٔ دیگر مساوی باشند ، دومثلث متشابهند .

اثبات به‌عهدهٔ دانش‌آموزان است .

قضیه ـ اگر دو ضلع زاویهٔ قائمه از یک مثلث قائم‌الزاویه با دو ضلع زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر نظیر به‌نظیر متناسب باشند ، دومثلث متشابهند .

اثبات به‌عهدهٔ دانش‌آموزان است .

قضیه ـ اگر وتر ویک‌ضلع ازمثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر و یک‌ضلع ازمثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر نظیر به‌نظیر متناسب باشند ، دومثلث متشابهند .



درشکل بالا بنابه‌فرض : $\angle A=\angle A'=90^\circ$ و $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$ ، می‌خواهیم ثابت کنیم : $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

برهان ـ در روی ضلع AB پاره‌خط AE را مساوی $A'B'$ جدا می‌کنیم و ازنقطهٔ E خط ED را موازی BC رسم می‌کنیم، درنتیجه $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ است (چرا؟) و از آنجا داریم:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{DE}{BC}$$

از مقایسهٔ این تناسب با تناسب فرض قضیه ($\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$) و با توجه به این‌که $AE=A'B'$ است ، نتیجه می‌شود که $DE=B'C'$ و دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADE و $A'B'C'$ درحالت تساوی نظیر به‌نظیر وتر و یک‌ضلع با هم مساوی می‌شوند، وچون $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ است پس $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

پرسش ـ در دو مثلث متساوی‌الساقین ABC و $A'B'C'$ بـه رأسهای A و A' داریم :

$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$ ؛ آیا دومثلث متشابهند (چرا؟) .

نسبت مساحتهای دو چند ضلعی متشابه

قضیه ـ در دومثلث متشابه نسبت ارتفاعهای متناظر با نسبت تشابه دومثلث برابر است.

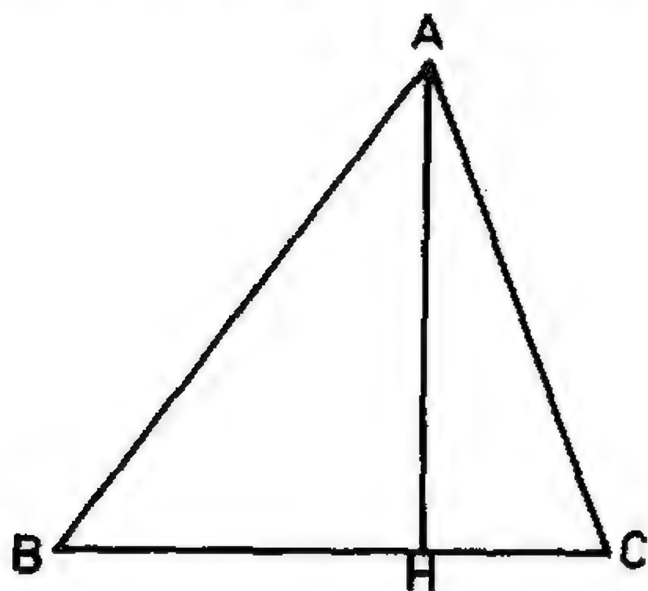
بنابه‌فرض درشکل مقابل دومثلث $A'B'C'$ و ABC متشابهند و اضلاع AB وBC و AC به‌ترتیب با اضلاع $A'B'$ و$B'C'$ و$A'C'$ متناظرند و $B'H' \perp A'C'$ و $BH \perp AC$.

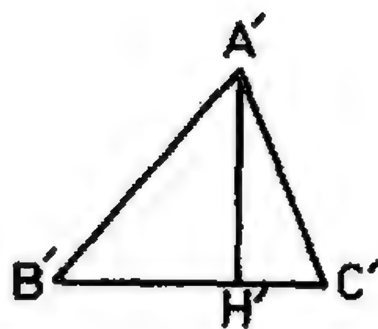
می‌خواهیم ثابت‌کنیم: $\frac{B'H'}{BH}=\frac{A'B'}{AB}$ (نسبت $k=\frac{A'B'}{AB}$ را نسبت تشابه گویند)

برهان ـ چون$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ است (اضلاع متناظر متناسبند و زوایا نظیر به‌نظیر مساویند) پس$\angle A = \angle A'$ بنابراین دومثلث‌قائم‌الزاویهٔ ABH و $A'B'H'$ در دو زاویهٔ A وA' مساویند ، پس این دومثلث قائم‌الزاویه متشابهند و درنتیجه $\frac{B'H'}{BH}=\frac{A'B'}{AB}$ یا $\frac{B'H'}{BH}=k$.

قضیه ـ نسبت مساحتهای دومثلث متشابه مساوی توان دوم نسبت تشابه آنهاست.

بنابه‌فرض در شکل زیر$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$و اضلاع AB و BC و AC به ترتیب با اضلاع$A'B'$ و$B'C'$و$A'C'$ متناظرند واگر نسبت‌تشابه دومثلث k فرض‌شود، و S و S' به‌ترتیب





مساحتهای مثلثهای ABC و $A'B'C'$ اختیار شوند، می‌خواهیم ثابت‌کنیم : $\frac{S'}{S}=k^2$.

برهان ـ AH و $A'H'$ ارتفاعهای وارد بر دوقاعدهٔ BC و $B'C'$ را در دو مثلث رسم می‌کنیم . داریم :

$$S=\frac{1}{2}BC \cdot AH \quad \text{و} \quad S'=\frac{1}{2}B'C' \cdot A'H'$$

پس
$$\frac{S'}{S}=\frac{B'C' \cdot A'H'}{BC \cdot AH}$$

اما
$$\frac{B'C'}{BC}=k \quad \text{و} \quad \frac{A'H'}{AH}=k$$

پس
$$\frac{S'}{S}=\frac{B'C'}{BC}\times\frac{A'H'}{AH}=k.k=k^2$$

یا
$$\frac{S'}{S}=k^2$$

قضیه ـ نسبت مساحتهای دوچند ضلعی متشابه مساوی توان دوم نسبت تشابه آنهاست .

دو چند ضلعی ABCDE و $A'B'C'D'E'$ متشابهند و بنابراین داریم :

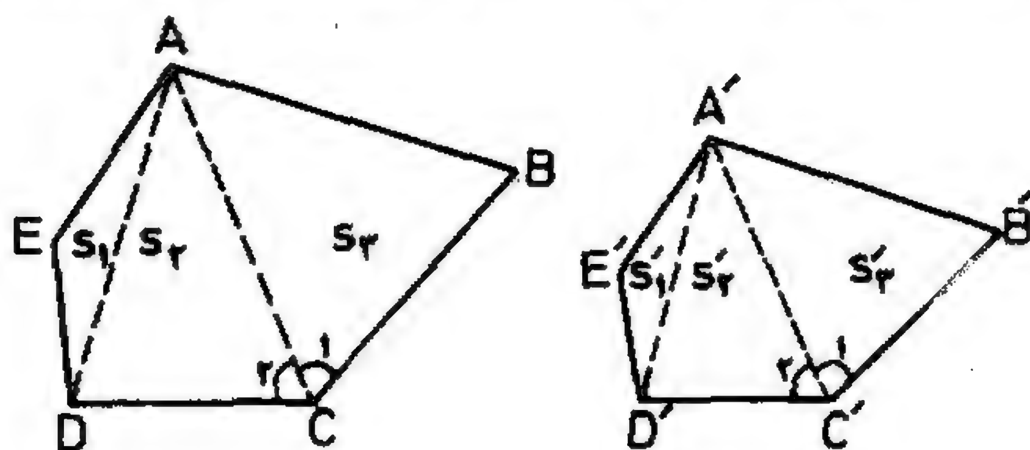
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'E'}{DE}=\frac{E'A'}{EA}=k$$

می‌خواهیم ثابت کنیم :

$$\frac{S'}{S}=k^2$$

(S' مساحت چند ضلعی $A'B'C'D'E'$ و S مساحت چند ضلعی ABCDE می‌باشد) .

برهان ـ قطرهای دوچند ضلعی را از نقاط A و A' رسم می‌کنیم و مساحت مثلثهای حاصل را s_1 و s_2 و . . . و s_1' و s_2' و . . . می‌نامیم . بسادگی ثابت می‌شود که



مثلثهای متناظر متشابهند و درنتیجه داریم :

$$\frac{s_1'}{s_1}=\frac{s_2'}{s_2}=\frac{s_3'}{s_3}= \ldots =k^2$$

و با استفاده از خاصیت تناسب خواهیم داشت :

$$\frac{s_1'+s_2'+s_3'+\ldots}{s_1+s_2+s_3+\ldots}=k^2$$

یا

$$\frac{S'}{S}=k^2$$

تمرین

۱ـ کدام یك ازگزارهای زیر درست وکدام‌یك نادرست است.

در دو چند ضلعی متشابه زاویه‌های متناظر مساوی یکدیگرند ـ یك لوزی که طول ضلع آن دو برابر طول ضلع لوزی دیگر باشد ، با آن متشابه است ـ دو لوزی که هر یك دارای یك زاویهٔ °۳۰ باشند متشابهند ـ دو مستطیل که زاویه‌های حادهٔ بین دو قطرآنها نظیر به نظیر مساوی باشند متشابهند ـ دو چند ضلعی متساوی متشابهند ـ دو مستطیل که اندازهٔ درازا وپهنای یکی سه برابر درازا وپهنای دیگری باشد متشابهند ـ هردومثلث متساوی‌الساقین متشابهند ـ دومثلث متساوی‌ـ الساقین‌که یك‌زاویهٔ مجاور به‌قاعده از یکی با زاویهٔ نظیر از مثلث دیگر مساوی باشد متشابهند ـ دو مثلث متشابهند و محیط یکی دو برابرمحیط دیگری است ؛ مساحت مثلث کوچکتر $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث بزرگتراست ـ نسبت مساحت دومتوازی‌الاضلاع متشابه به‌نسبت اضلاع آنها می‌باشد ـ در دو چندضلعی متشابه اگر مساحت یکی ۹ برابر مساحت دیگری باشد اضلاع چند ضلعی بزرگتر سه‌برابر اضلاع متناظر ازچند ضلعی کوچکتر است.

۲ـ A و B و C زاویه‌ها و a و b و c به‌ترتیب اضلاع مقابل به‌این زاویه‌ها درمثلث ABC می‌باشند و A′ و B′ و C′ و a′ و b′ و c′ زاویه‌ها و اضلاع مثلث A′B′C′ می‌باشند ؛ درکدام یك از حالات زیر دومثلث ABC و A′B′C′ متشابهند (طول اضلاع برحسب سانتیمتر می‌باشد) .

الف) $\angle A=۶۰^\circ$ ، $\angle B=۵۰^\circ$ و $\angle A'=۵۰^\circ$ ، $\angle C'=۷۰^\circ$

ب) $\angle A=۳۰^\circ$ ، $\angle B=۵۰^\circ$ و $\angle A'=۶۰^\circ$ ، $\angle B'=۱۰۰^\circ$

ج) $\angle C=۷۵^\circ$ ، $a=۲$ ، $b=۳$ و $\angle A'=۷۵^\circ$ ، $c'=۳$ ، $b'=۴/۵$

د) $\angle A=\angle B=۷۰^\circ$ و $\angle A'=۴۰^\circ$ و $\angle B'=\angle C'$

ه) $\angle A=۴۵^\circ$ ، $c=۱۰$ ، $b=۱۵$ و $\angle C'=۴۵^\circ$ ، $b'=۹$ ، $a'=۶$

و) $\angle C=۳۰^\circ$ ، $b=۳$ ، $a=۵$ و $\angle C'=۶۰^\circ$ ، $b'=۶$ ، $a'=۱۰$

ز) $a=۲$ ، $\angle C=۴۰^\circ$ ، $\angle B=۳۰^\circ$ و $a'=۴$ ، $\angle C'=۸۰^\circ$ ، $\angle B'=۶۰^\circ$

ح) $a=۲$ ، $b=۳$ ، $c=۴$ و $c'=۶$ ، $b'=۴/۵$ ، $a'=۳$

ط) $a=۴$ ، $b=۶$ ، $c=۸$ و $c'=۱۲$ ، $b'=۶$ ، $a'=۹$

ی) $a=5$ ، $b=6$ ، $c=10$ و $c'=8$ ، $b'=6$ ، $a'=5$

ك) $a=b=c=4$ ، و $\angle A'=\angle B'=60^\circ$

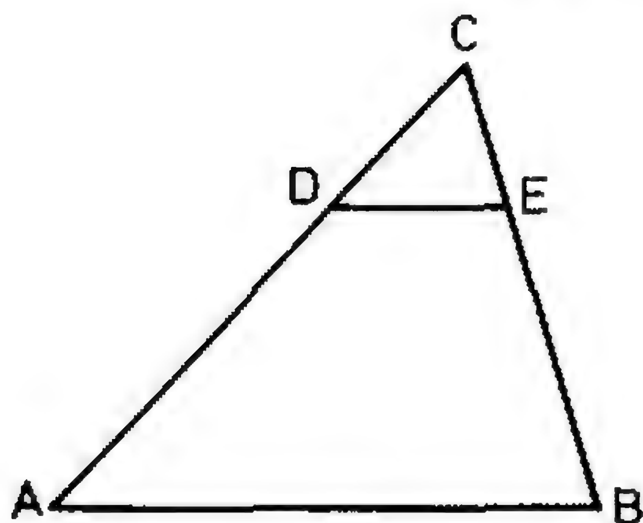
ل) $\frac{\angle A+\angle B}{2}=45^\circ$ ، $\frac{\angle A-\angle B}{2}=15^\circ$ و $\angle B'=30^\circ=\frac{\angle C'}{2}$

۳ـ دومثلث متشابهند ، اندازه‌های سه‌ضلع یکی ۱۲ سانتیمتر و ۱۵ سانتیمتر و ۲۱ سانتیمتر است و محیط مثلث دیگر ۱۶ سانتیمتر می‌باشد ، اندازهٔ ضلعهای مثلث دیگر را حساب‌کنید.

۴ـ دومثلث‌متشابهند، اندازه‌های دوضلع‌ازیك مثلث ۱۲سانتیمتر و ۱۰ سانتیمتر واندازه‌های دوضلع از مثلث دیگر ۸ سانتیمتر و ۱۰ سانتیمتر است ، اندازهٔ ضلع سوم هردو مثلث را حساب کنید .

۵ـ دومثلث متشابهند، نسبت محیط آنها به‌یکدیگر مثل ۲ است به ۳ ، اگر اضلاع یکی از مثلثها ۶ ، ۹ و ۱۲ سانتیمتر باشد ، اندازه‌های سه‌ضلع دیگری را حساب‌کنید .

(مسئله دوجواب دارد ، هردوجواب را به دست آورید)

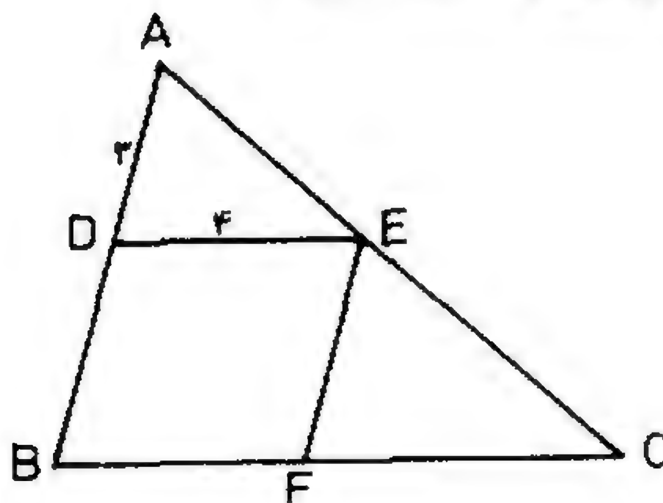


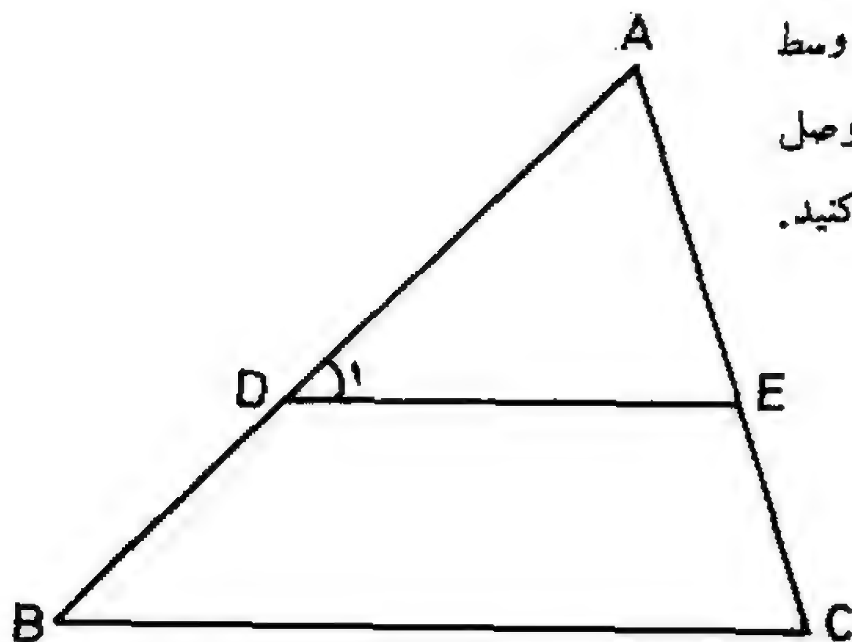
۶ـ درشکل مقابل $AB \| DE$ است .

الف) اگر $CD=5$ و $AB=15$ و $DE=6$ باشند (واحدبرای‌هرسه‌پاره‌خطسانتیمتر است) اندازهٔ ضلع CA را حساب‌کنید .

ب) اگر $AB=\frac{3}{2}DE$ و $CE=4$ و $AB=12$ سانتیمتر باشد، CB و EB را حساب‌کنید.

۷ـ در شکل زیر $DE \| BC$ و $EF \| AB$ و $AD=3$ سانتیمتر و $DE=4$ سانتیمتر و $FC=5$ سانتیمتر است ، اندازه BD را حساب کنید .





۸ـ اندازهٔ سه ضلع مثلثی ۶ سانتیمتر و ۸ سانتیمتر و ۱۰ سانتیمتر است؛ خطی از وسط ضلع بزرگتر به وسط کوچکترین ضلع وصل شده‌است، طول اضلاع مثلث حاصل‌را حساب کنید.

۹ـ در شکل مقابل با کدام‌یك از شرایط زیر DE موازی BC است :

الف) $\angle A = ۶۰^\circ$، $\angle D_۱ = ۷۰^\circ$، $\angle C = ۵۰^\circ$

ب) $AB = ۱۰$ ، $BD = ۴$ ، $AE = ۴/۸$ ، $EC = ۳/۲$

ج) $DE = ۵$ ، $BC = ۱۲$ ، $AD = ۳$ ، $BD = ۴/۲$

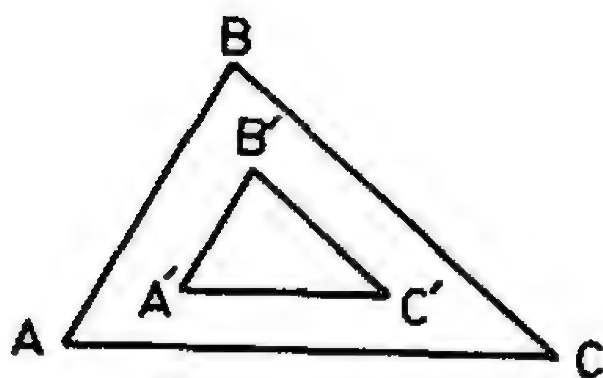
د) $AE = ۶$ ، $AB = ۱۰$ ، $AD = ۴/۵$ ، $AC = ۷/۵$

ه) $DE = ۴$ ، $BC = ۱۰$ ، $AE = ۲$ ، $AB = ۵$

و) $DE = \frac{۲}{۳}BC$ ، $AD = ۵$ ، $BD = ۲/۵$

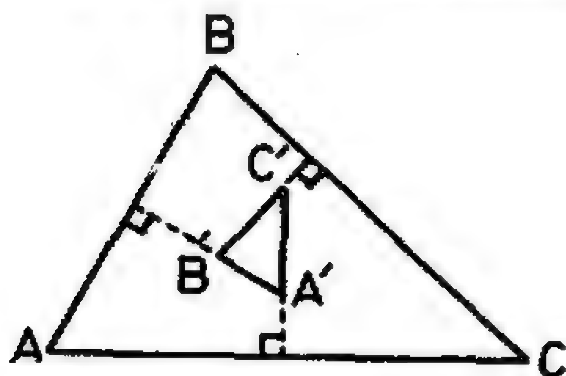
ز) $AB \,.\, BD = AD \,.\, EC$

(تمام اندازه‌ها با یك واحد اندازه‌گیری شده است).



۱۰ـ اضلاع دو مثلث ABC و A′B′C′ نظیر به‌نظیر با هم موازیند (مطابق شکل). ثابت کنید :

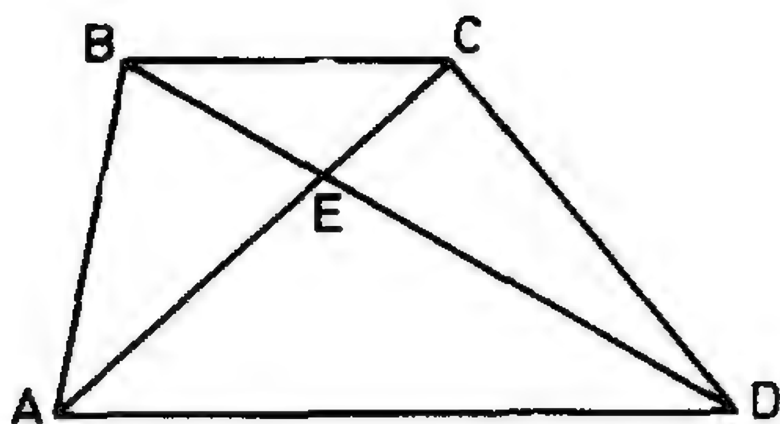
$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ است.

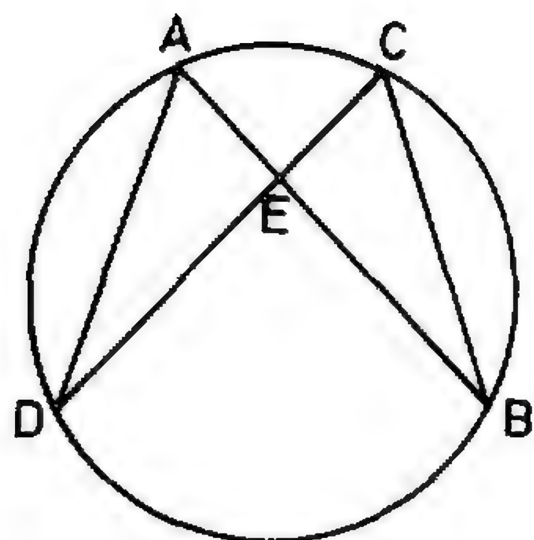


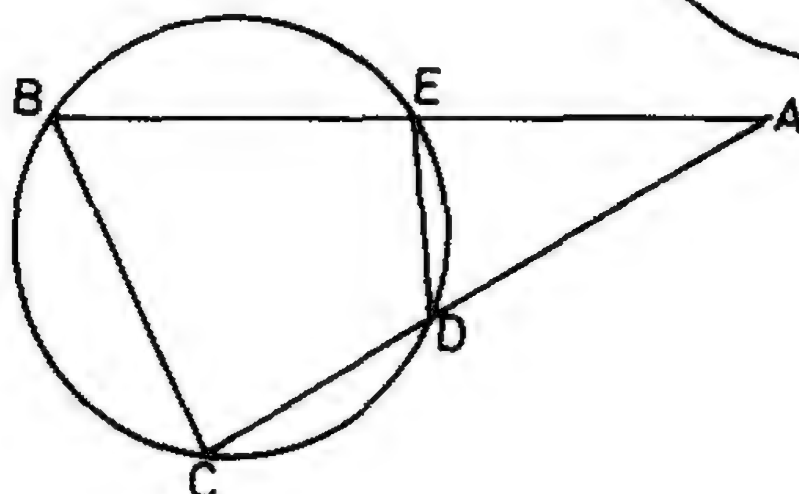
۱۱ـ اضلاع دو مثلث ABC و A′B′C′ نظیر به‌نظیر برهم عمودند (مطابق شکل) . ثابت کنید :

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ است .

۱۲ـ درهرکدام از سه شکل زیر دومثلث متشابه وجود دارد ، آنها را مشخص نموده و علت تشابه آنها را بیان نمایید .





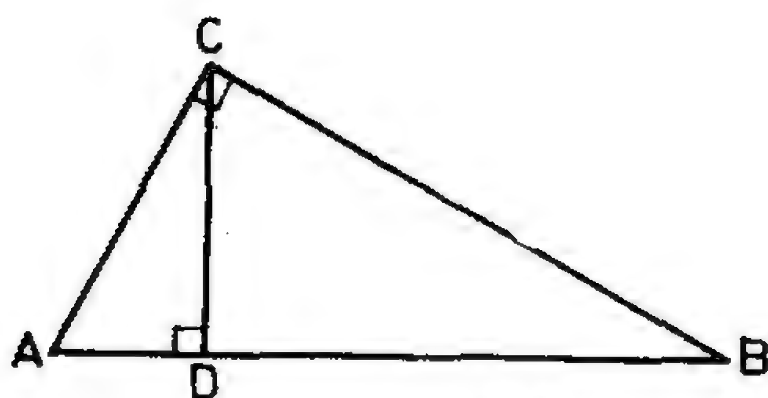


۱۳ــ درهریك از شکلهای زیر ثابت‌کنید مثلثهای خواسته شده با هم متشابهند .

الف) $\angle D = \angle ACB = 90^\circ$

ثابت کنید :

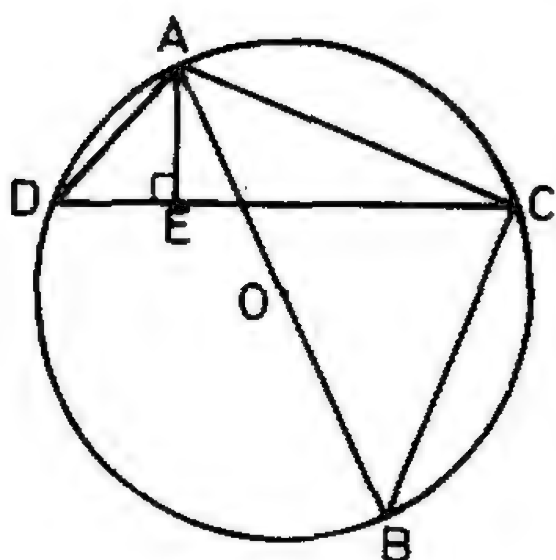
$\triangle ABC \sim \triangle ACD$ (شکل الف)



شکل الف

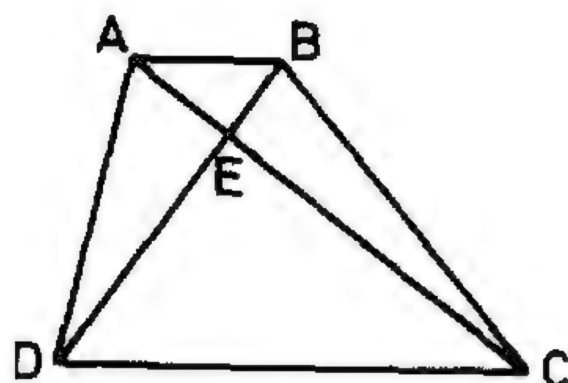
ب) AB قطر دایره و $AE \perp DC$ ، ثابت کنید:

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (شکل ج)



شکل ب

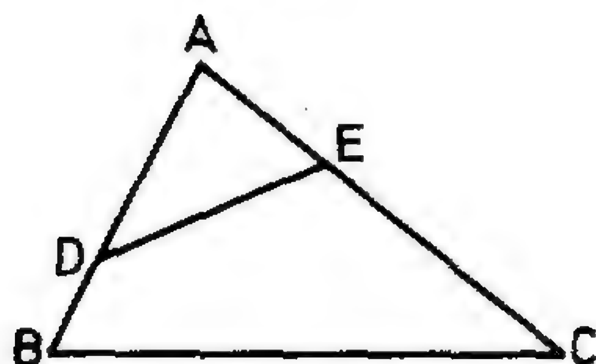
۱۴ـ شکلهای زیر را در نظر بگیرید .



شکل الف

درشکل الف) $AE = ۴$ ، $BE = ۳$ ، $DE = ۹$ ،
$CE = ۱۲$ ثابت کنید :

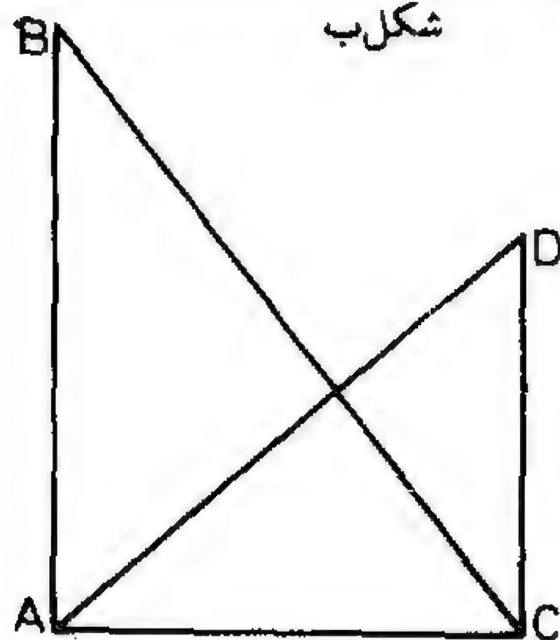
$\triangle AEB \sim \triangle DEC$



شکل ب

درشکل ب) $AE = ۶$ ، $AD = ۹$ ؛ $AB = ۱۲$ ،
$AC = ۱۸$ ثابت کنید :

$\triangle AED \sim \triangle ABC$



شکل ج

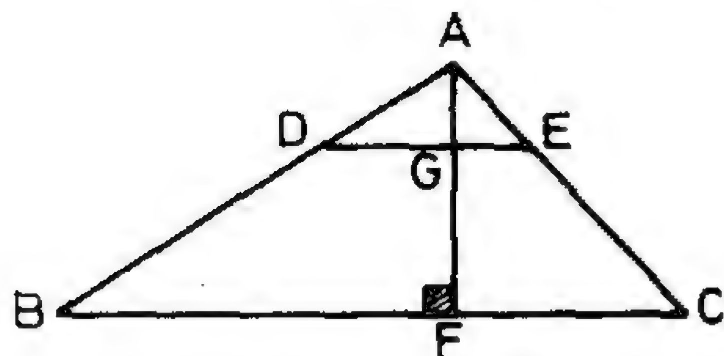
در شکل ج) $AC \perp AB$ ، $AC \perp CD$ ،
$AB = ۲۵$ ، $DC = ۱۶$ ، $AC = ۲۰$ ثابت کنید :

$\triangle ABC \sim \triangle ADC$

۱۵ ـ اگر نسبت تشابه دو مثلث $\frac{۳}{۲}$ باشد ، نسبت میانه‌های متناظر آن چیست ؟

۱۶ـ اضلاع مثلثی ۷ و ۶ و ۴ سانتیمتر می‌باشد ، مثلث دیگری است که با آن متشابه است و محیطش ۵۱ سانتیمتر می‌باشد ، اضلاع مثلث دوم را حساب کنید.

۱۷ ـ در شکل مقابل داریم :
$AF \perp BC$ ، $AF = ۱۰$ ، $AG = ۳$ ،
$BC = ۲۵$ ، $DE \| BC$ ؛ اندازهٔ ضلع DE
را به‌دست آورید .



۱۸ـ اگر نسبت اضلاع متناظر دوچندضلعی متشابه $\frac{۴}{۳}$ باشد ، نسبت محیط آنها چیست؟

۱۹ـ نسبت محیط دوچهارضلعی متشابه $\frac{۵}{۴}$ است ؛ اگر یك ضلع از چهارضلعی کوچکتر مساوی ۸ سانتیمتر باشد ، ضلع متناظر آن درچهارضلعی بزرگتر چیست ؟

فصل دوم

رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه

(۲-۱) ـ کلیات

بین اجزای خطی هرشکل هندسی رابطه‌هایی می‌توان یافت‌که به اندازه‌های آنها بستگی ندارند، از این جمله آن است‌که

ـ در مثلث سه ارتفاع همرسند.

ـ در دایره قطر عمود بریك وتر نیمساز زاویهٔ مرکزی مقابل به آن وتر است.

ـ خطی‌که وسطهای دوضلع ازمثلثی را بههم وصل می‌کند با ضلع سوم مثلث موازی‌است.

و ....

دراین‌گونه رابطه‌ها آنچه به عنوان‌یك خط یا یك پاره خط دخالت دارد، مجموعهٔ نقطه‌ها است و یك مفهوم هندسی است .

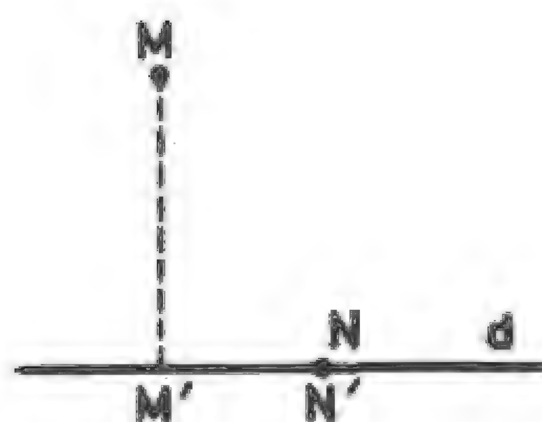
گاهی رابطهٔ بین اجزای خطی یك شکل برحسب اندازه‌های آنهاست که با اعداد بیان می‌شوند، این‌گونه‌رابطه‌های بین‌اجزای خطی یك‌شکل هندسی‌را «رابطه‌های طولی[۱]» می گوییم. یعنی :

رابطه‌های طولی رابطه‌هایی‌هستند‌که بین اندازه‌های اجزای خطی‌یك شکل برقرارباشند .

(۲-۲) ـ تصویر قائم بریك خط

(۲-۲-۱) ـ تصویر نقطه ـ تصویر قائم نقطهٔ مفروض M برخط d نقطهٔ برخوردخط d باعمودی است که از آن نقطه برآن خط فرود می‌آید .

تصویر قائم هرنقطهٔ M را برخط مفروض d با نماد P_d^M نمایش می‌دهیم .



شکل (۲ ـ ۱)

---

۱ ـ رابطه‌های طولی را به‌آن اعتبارکه به‌اندازه‌ها مربوط هستندگاهی «رابطه‌های‌متری» گفته‌اند.

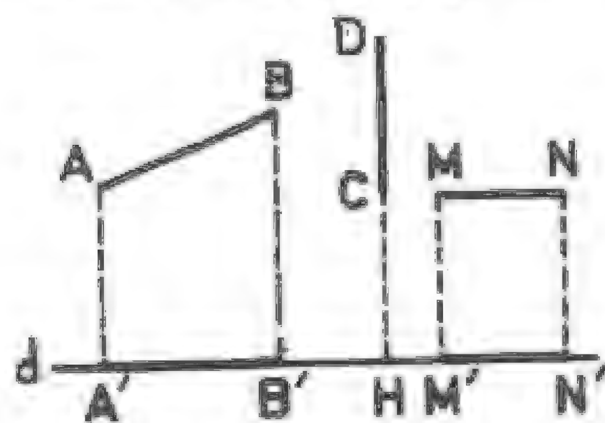
درشکل (۲-۱) ، $P_d{}^{M} = M'$ است. درتصویر، خط d را محورتصویروپاره خط MM' را مُصَوّرِ نقطهٔ M برآن خط می‌گوییم .

از این تعریف نتیجه می‌شود که

هرنقطهٔ مفروض برهرمحور تنها یك تصویر قائم دارد .

اگـر نقطه‌ای برمحور تصویر واقع باشد ، تصویرش برآن محور ، برخـود آن نقطه منطبق‌است (چون‌دراین‌کتاب بانوع دیگری ازتصویر سروکارنداریم، از این به‌بعد بجای «تصویر قائم» به‌اختصار «تصویر» می‌گوییم).

(۲-۲-۲) ـ تصویر یك پاره خط ـ تصویر هرپاره خط برمحوری که با آن در یك صفحه واقع باشد ، پاره خطی است‌که دوسرآن تصویرهای ابتدا و انتهای آن پاره خط باشند .



شکل (۲ — ۲)

در شکل (۲-۲)،

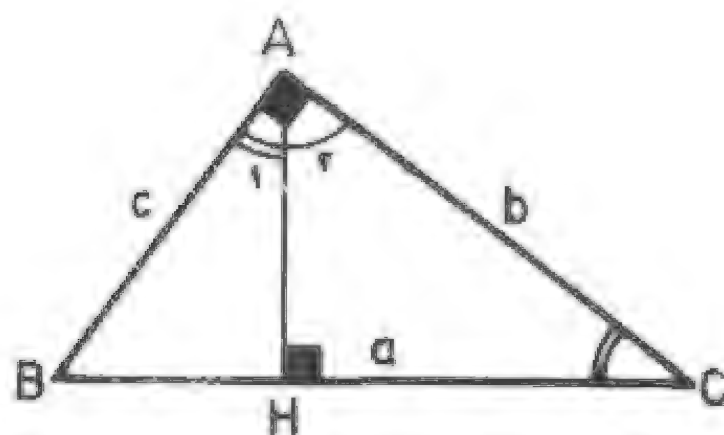
$$P_d{}^{AB} = A'B'$$

اگرخط‌یا پاره خطی برمحورتصویر عمود باشد ، تصویر آن منحصر به یك نقطه است. مانند پاره خط CD درشکل (۲-۲) که‌تصویر آن‌همان نقطهٔ H است.

درحالت‌کلی ، اندازهٔ تصویر قائم هرپاره خط بریك محور از اندازهٔ آن پاره خط‌کوچکتر است، مگر درحالتی‌که پاره خط با محور تصویر موازی باشد‌که دراین صورت تصویر پاره خط با آن مساوی است (چرا ؟). مانند پاره خط MN درشکل (۲-۲).

(۲-۳) ـ رابطه‌های طولی درمثلث قائم‌الزاویه

(۲-۳-۱) ـ قضیه ـ در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع اندازهٔ هرضلع زاویهٔ قائمه مساوی است با حاصل ضرب اندازهٔ وتر در اندازهٔ تصویر آن ضلع بروتر .



شکل (۲ — ۳)

یعنی اگـر درمثلث ABC شکل (۲-۳)، $\hat{A} = 90^\circ$ و AH ارتفاع نظیروتر باشد :

$$AB^2 = BC.BH$$

و

$$AC^2 = BC.CH$$

برهان ـ برای اثبات قضیه ملاحظه می‌کنیم که در دومثلث HAB و ACB :

$\angle A = \angle H$ (هردوقائمه‌اند)

$\angle C = \angle A_1$ (هردومتمم $\angle A_2$ هستند)

بنابراین دومثلث متشابهند و درنتیجه

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BH} \Longrightarrow AB^2 = BC.BH$$

به دلیل مشابه ثابت می‌شود که $AC^2 = BC.CH$

اگر درهرمثلث ABC اندازه‌های اضلاع مقابل به رأسهای A و B و C را به ترتیب با a و b و c ، که هم نام رأسهای مقابل‌آنها هستند ، نمایش دهیم، دورابطهٔ بالا به صورتهای سادهٔ زیر نوشته می‌شوند :

$$c^2 = a.BH \quad و \quad b^2 = a.CH$$

قضیه را به صورت زیر نیز می‌توان بیان‌کرد :

در هرمثلث قائم‌الزاویه هرضلع زاویهٔ قائمه واسطهٔ هندسی است بین وتر و تصویر قائم آن ضلع بروتر .

مسئله ـ درمثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ یك ضلع زاویهٔ قائمه ۸ سانتیمتر و اندازهٔ تصویر آن ضلع بروتر ۶/۴ سانتیمتراست. اضلاع مثلث را حساب‌کنید .

حل ـ اگر درمثلث ABC، $\hat{A} = ۹۰^\circ$ وضلع سانتیمتر $b = ۸$ باشد :

$$b^2 = a.CH \Longrightarrow ۸^2 = ۶/۴a \Longrightarrow a = ۱۰$$

و چون $BH = a - CH$ است :

$$[c^2 = a.BH \Longrightarrow c^2 = ۳۶] \Longrightarrow c = ۶$$

تمرین

۱ ـ در مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ وتر ۲۰ سانتیمتر است و ارتفاع نظیر وتر برآن ضلع دوپاره خط متناسب با اعداد ۱۶ و ۹ جدا می‌کند. اضلاع مثلث را حساب‌کنید .

۲ ـ درمثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ یك ضلع زاویهٔ قائمه ۸ سانتیمتر و اندازهٔ تصویر آن بروتر ۲ سانتیمتر است، سایر اضلاع مثلث را حساب‌کنید .

۳ ـ در مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازه‌های دوپاره خطی که ارتفاع نظیر رأس قائمه بروتر جدا می‌کند m^2a و $(۱ - m^2)a$ هستند (m عددی حقیقی است). اندازه‌های سه ضلع مثلث را برحسب a و m حساب کنید (به ازاء مقادیر مختلف m بحث‌کنید.)

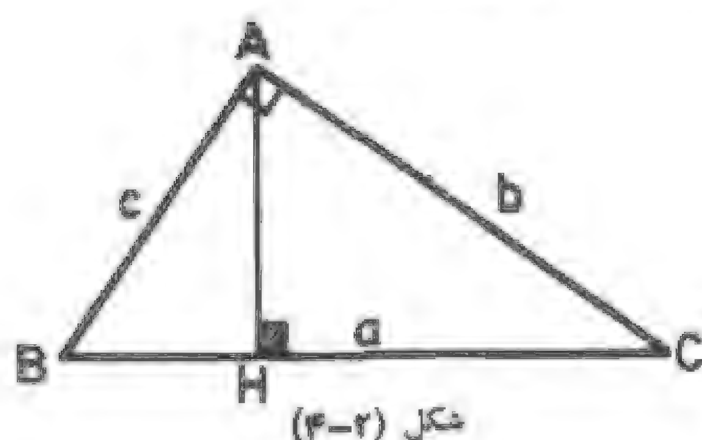
۴ـ بر پاره خط AB نقطه‌ای مانند C اختیار کرده و دونیم دایره یکی بقطر AB و

دیگری به‌قطر AC در یك طرف AB رسم می‌کنیم. بر قطر AC نقطهٔ D را اختیار کرده و از این نقطه خطی برخط AB عمود می‌کنیم تا دو نیمدایره را به‌ترتیب درنقاط M و N قطع کند ثابت کنید $\frac{AM^2}{AN^2}$ مقدارثابتی است و به‌موضع نقطهٔ D بر پساره خط AC بستگی نـدارد.

(۲-۳-۲) - قضیه - (قضیهٔ فیثاغورس) - در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع اندازهٔ وتر برابر است با مجموع مربعهای اندازه‌های دوضلع دیگر .

یعنی اگر مثلث ABC در رأس A قائمه باشد ، شکل (۲-۴) ،

$$a^2=b^2+c^2 \quad \text{یا} \quad BC^2=AB^2+AC^2$$



شکل (۲-۴)

برهان - بنا به قضیهٔ قبل :

$$b^2=a.CH$$

$$c^2=a.BH$$

چون این دوتساوی را عضو به عضو بـاهم جمع‌کنیم خواهیم داشت :

$$b^2+c^2=a.CH+a.BH$$
$$=a(CH+BH)$$

و چون $CH+BH=a$ است ،

$$b^2+c^2=a^2$$

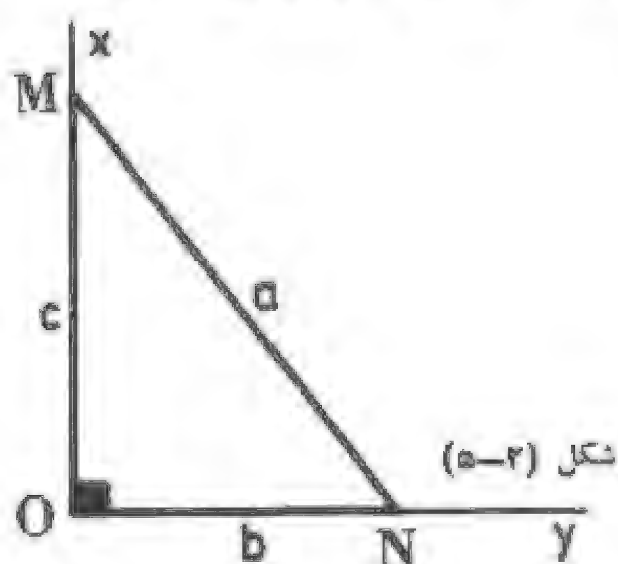
نتیجه - درهرمثلث قائم‌الزاویه مربع اندازهٔ هرضلع زاویهٔقائمه با فزونی‌مربع اندازهٔ وتر برمربع اندازهٔ ضلع دیگر برابر است .

یعنی درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$:

$$b^2=a^2-c^2 \quad \text{و} \quad c^2=a^2-b^2$$

(۲-۳-۳) - قضیه - (عکس قضیهٔ فیثاغورس) - هر گاه در مثلثی مـربع اندازهٔ یك ضلع مساوی مجموع مربعهای اندازه‌های دوضلع دیگر باشد، مثلث قائم‌الزاویه است .

برهان - مثلثی به اضلاع a و b و c درنظر می گیریم‌چنان‌که $a^2=b^2+c^2$ باشد. براضلاع Ox و Oy از زاویهٔ قائمهٔ xOy ، شکل(۲-۵) دوپاره خط OM=c و ON=b را جداکرده و نقاط M و N را به‌هم می‌پیوندیم . در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMN بنا به‌قضیهٔ ۲:



شکل (۲-۵)

$$MN^2=OM^2+ON^2=c^2+b^2$$

از طرفی بنا به فرض $c^2+b^2=a^2$ است، بنابراین $MN^2=a^2$ یا $MN=a$ است .
پس سه ضلع مثلث مفروض با اضلاع مثلث MNO متساویند، بنابراین دو مثلث برابرند و مثلث نخست قائم الزاویه است.

مسئلهٔ ۱ - اضلاع زاویهٔ قائمهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۱۶ و ۱۲ سانتیمترند، اندازهٔ وتر و ارتفاع وارد برآن را تعیین کنید .

حل - اگر مثلث مفروض در رأس A قائمه باشد ، بنا به قضیهٔ فیثاغورس .

$$BC^2=AB^2+AC^2=12^2+16^2=400 \Longrightarrow BC=20$$

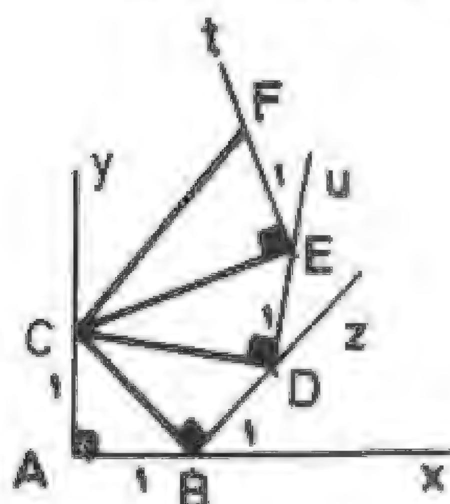
از طرفی $AB^2=BC.BH \Longrightarrow 12^2=20\times BH \Longrightarrow BH=7/2$

و درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABH :

$$AH^2=AB^2-BH^2=12^2-7/2^2=92/16 \Longrightarrow AH=9/6$$

مسئلهٔ ۲ - می‌خواهیم پاره خطهایی به اندازه‌های $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{4}$ و $\sqrt{5}$ و... رسم کنیم. (واحد درازا را سانتیمتر می‌گیریم .)

حل - بردوضلع Ax و Ay از زاویهٔ قائمهٔ xAy شکل (۲-۶) ، هریك از پاره خطهای AB و AC را مساوی یك سانتیمتر جدا می‌کنیم ، پاره خط BC برحسب سانتیمتر مساوی $\sqrt{2}$ است (چرا؟) .



شکل (۲-۶)

در نقطهٔ B نیم خط Bz را برBC عمود رسم کرده و برآن پاره خط BD را مساوی يك‌سانتیمتر جدا می‌کنیم ، نقاط C و D را به هم می‌پیوندیم. اندازهٔ پاره خط DC برحسب سانتیمتر مساوی $\sqrt{3}$ است و ....

تمرین

۱ - اگر a وb وc اندازه‌های اضلاع‌یك مثلث باشند ،کدام‌یك ازمثلثهای‌زیر قائم‌الزاویه است ؟

- مثلثی به اضلاع $a=11$ و $b=4\sqrt{3}$ و $c=13$
- مثلثی به اضلاع $a=20$ و $b=16$ و $c=13$
- مثلثی به اضلاع $c=10$ و $b=6$ و $a=8$
- مثلثی به اضلاع $c=17$ و $b=8$ و $a=15$

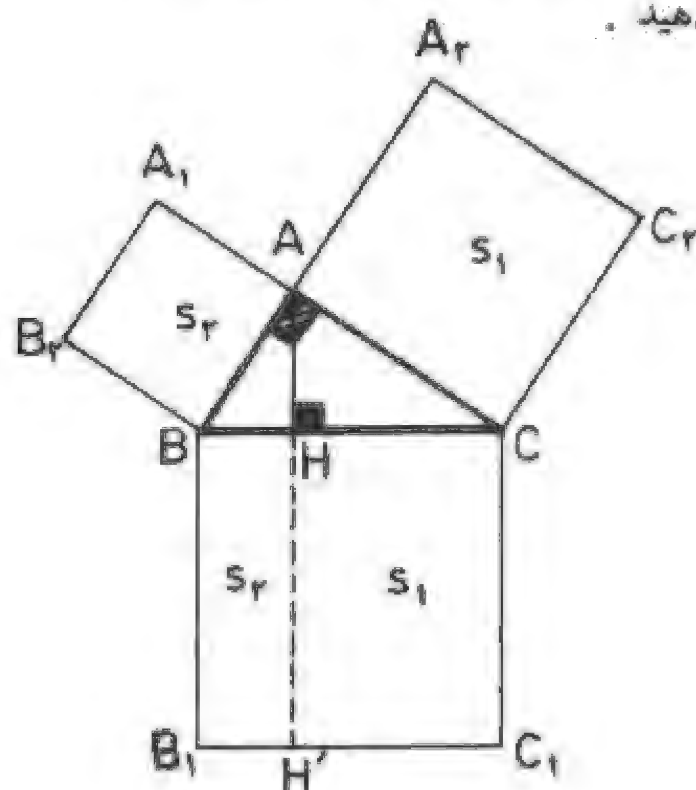
۲ - درمثلث قائم‌الزاویه‌ای یکی‌اززاویه‌ها $30°$ وضلع مقابل آن زاویه ۸ سانتیمتراست، اندازه‌های سایر اضلاع و ارتفاع نظیر وتر مثلث را تعیین کنید .

۳ ـ در مثلثی اندازه‌هـای دوضلع به ترتیب ۱۲ و ۲۴ سانتیمتر و زاویهٔ بین آنها $60°$ است، اندازهٔ ضلع سوم و ارتفاعهای مثلث را تعیین کنید .

۴ ـ از نقطهٔ M وسط ضلع AB ازمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در رأس A قائمه‌است عمودی بروتر BC فرود می‌آوریم تا آن را درنقطهٔ N قطع کند، ثابت کنید :

$$NC^2 - NB^2 = AC^2$$

۵ ـ اگرمثلث ABC دررأس A قائم‌الزاویه باشد، به‌کمك شکل (۲-۷) درستی قضیهٔ فیثاغـورس را نشان دهید .



شکل (۲-۷)

(۲ ـ ۳ ـ ۴) ـ قضیه ـ در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع اندازهٔ ارتفاع وارد بروتر برابر است باحاصل ضرب‌اندازه های پاره‌خطهایی کـه پـای ارتفاع بروترپدید می‌آورد.

به‌بیان دیگر :

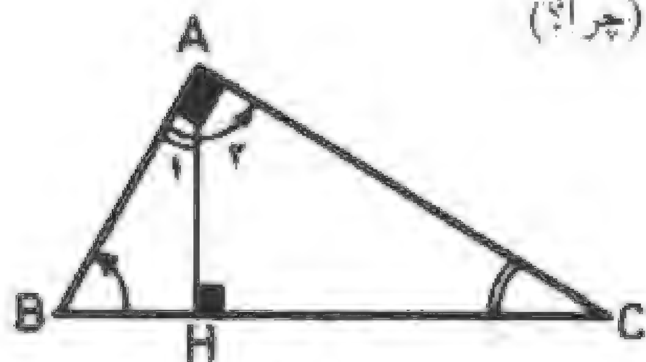
درهرمثلث‌قائم‌الزاویه ارتفاع واردبر وترواسطهٔ هندسی است‌بین دوپاره خطی که پای ارتفاع بروتر پدید می‌آورد .

برهان ـ اگر مثلث ABC شکل(۲-۸) در رأس A قائم‌الزاویه باشد ، در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و AHC

$$\angle A_1 = \angle C \Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle CHA$$ (چرا؟)

از تشابه دومثلث مزبور حاصل می‌شود،

$$\frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH.CH$$



شکل (۲-۸)

(۲-۳-۵) ـ قضیه ـ در هر مثلث قائم‌الزاویه حاصل ضرب دو ضلع زاویهٔ قائمه برابراست با حاصل‌ضرب وتر درارتفاع وارد بروتر .

برهان ـ درشکل (۲–۸) مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (قائمه‌دررأس A) راباحرف S نشان‌می‌دهیم وارتفاع AH وارد بروتر رارسم می‌کنیم وملاحظه می‌کنیم که اگرضلع AB راقاعدهٔ مثلث بگیریم ، AC ارتفاع مثلث می‌شود وداریم

$$S=\frac{۱}{۲}AB\ .\ AC \qquad (۱)$$

وچنانچه BC و AH راقاعده وارتفاع مثلث بگیریم داریم

$$S=\frac{۱}{۲}BC.AH \qquad (۲)$$

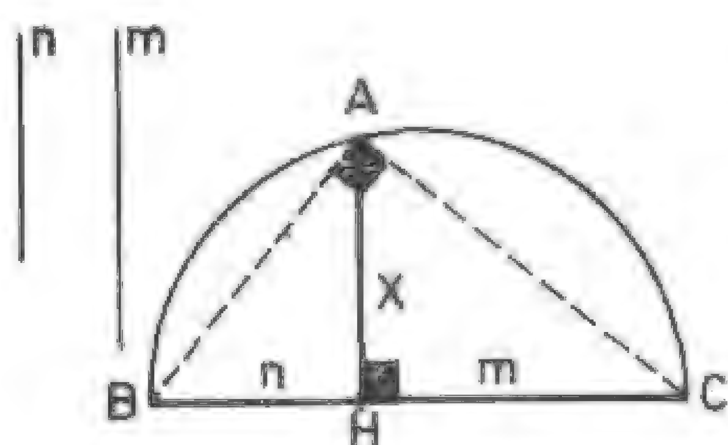
وازمقایسهٔ تساویهای(۱) و (۲) واضح می‌شودکه

$$AB.AC=BC.AH$$

(۲-۴)ـ رسم واسطهٔ هندسی دوپاره خط

دوپاره خط به اندازه‌های m و n مفروضند، می‌خواهیم پاره خطی رسم کنیم که واسطهٔ هندسی بین آن دوپاره خط باشد.

حل‌ـ بااستفاده از قضیهٔ ۴، کافی است مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنیم که پاره خطهایی کـه ارتفاع بروتر آن جدا می‌کند به اندازه هـای m و n باشند . بنابراین مسئله را به صورتی‌که در شکل (۲–۹) دیـده می‌شود حل می‌کنیم . (به‌چه‌طریق ؟) باتوجه به‌این‌که،



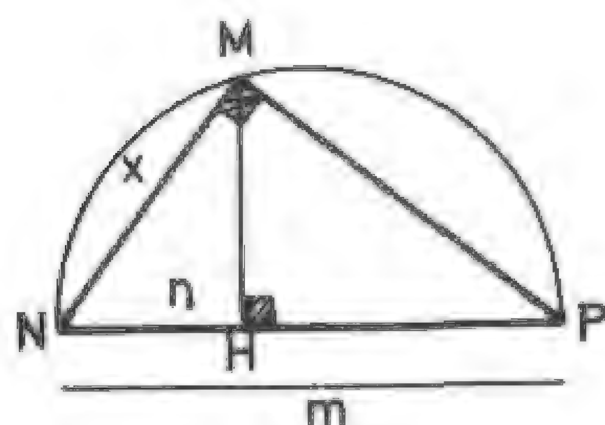
شکل (۲ – ۹)

$$x^{۲}=m.n$$

است، پاره‌خط AH همان پاره خط مطلوب خواهد بود.

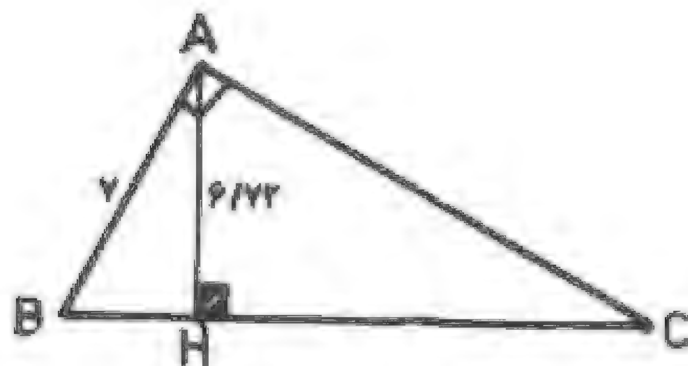
آیامی‌توانیدبااستفاده ازشکل(۲–۱۰) وویژگی دیگری ازمثلث قائم‌الزاویه راه حل‌دیگر مسئله را پیدا کنید ؟

(۲–۵) ـ حل‌مسئله‌های نمونه



شکل (۲ – ۱۰)

مسئله ۱ ـ درمثلث قائم‌الزاویه‌ای یک‌ضلع زاویهٔ قائمه ۷ سانتیمتر وارتفاع وارد بر وتر آن ۶٫۷۲ سانتیمتر است ، سایراضلاع مثلث راتعیین کنید.



شکل (۲ - ۱۱)

حل - اگر مثلث ABC شکل (۲-۱۱)، دررأس A قائم‌الزاویه وAH ارتفاع وارد بروتر آن باشد، به‌موجب قضایایی‌که ثابت شد :

$$BH^۲=AB^۲-AH^۲=۴۹-۴۵/۱۵۸۴=۳/۸۴۱۶\Longrightarrow BH=۱/۹۶$$

درمثلث‌قائم‌الزاویهٔ ABC : $AB^۲=BC.BH\Longrightarrow ۴۹=۱/۹۶BC$

ودرنتیجه $BC=۲۵$ سانتیمتراست، بنابراین :

$$AC^۲=BC^۲-AB^۲=۶۲۵-۴۹=۵۷۶$$

وازآنجا $AC=۲۴$ سانتیمتر به‌دست می‌آید.

مسئلهٔ ۳ - عدد m بزرگتر از یك را در نظر می‌گیریم. اگر اندازه‌های سه ضلع مثلثی $m^۲+۱$ و $m^۲-۱$ و $۲m$ باشند، نوع‌مثلث راتعیین کنید. ثابت‌کنید این سه‌عدددرهرحال می‌توانند اندازه‌های سه ضلع یك مثلث باشند.

حل - باملاحظهٔ آن‌که

$$(m^۲-۱)^۲+(۲m)^۲=m^۴-۲m^۲+۱+۴m^۲=m^۴+۲m^۲+۱=(m^۲+۱)^۲$$

یعنی، مجموع مربعهای دوعدد اخیرمساوی مربع عدداولی است. وجود این رابطه بین اعداد مزبورنشان می‌دهدکه این‌اعداد می‌توانند اندازه‌های سه‌ضلع یك‌مثلث قائم‌الزاویه‌باشند.

از مجموعهٔ اعداد مفروض به‌ازای مقادیر مختلف m مجموعه هـای سه عضوی متعدد می‌توان به‌دست آوردکه اعضای هرمجموعه اندازه‌های اضلاع یك مثلث قائم‌الزاویه‌اند. چنان که به ازای $m=۲$ ، $a=m^۲+۱=۵$ و $b=m^۲-۱=۳$ و $c=۲m=۴$ اندازه‌های سه ضلع یك مثلث قائم‌الزاویه مشخص می‌شوند.

به‌ازای $m=۳$ ، $a=۱۰$ و $b=۸$ و $c=۶$ ، اندازه‌های اضلاع مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری به‌دست می‌آیند.

واگر $m=۴$ باشد ، $a=۱۷$ و $b=۱۵$ و $c=۸$ حاصل می‌شوندکه اندازهٔ اضلاع مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری هستند.

به‌همین ترتیب مجموعه های سه عضوی عددهای درستی می‌توان مشخص کرد که عضوهای هرمجموعه اندازه‌های سه‌ضلع یك مثلث قائم‌الزاویه‌اند. به‌ازای هر عدد حقیقی m از عبارات فوق مجموعهٔ اندازه‌های اضلاع یك مثلث قائم‌الزاویه مشخص می‌شوند.

مجموعه هـای سه عضوی اعداد درستی را کـه اضلاع یك مثلث قائم‌الزاویه‌اند ، **عددهای فیثاغورسی** می‌گوییم.

برای اینکه سه عدد مذکور درهرحال اندازه های سه ضلع یك مثلث باشند ، باید نامساویهای مثلثی برقرار باشند، بنابراین

$$m^2+1<(m^2-1)+2m \Rightarrow m>1$$

$$2m>(m^2+1)-(m^2-1) \Rightarrow m>1$$

واین شرط بنابرفرض مسئله برقرارو حکم ثابت است.

در خواندنی شمارهٔ ۲ این کتاب دربارهٔ این گونه اعداد توضیح بیشتری داده شده است.

تمرین

۱ـ درمثلث قائم‌الزاویه‌ای ارتفاع وارد بر وتر ۲۴ سانتیمتر و دو پاره خطی که ارتفاع بر وتر پدید می‌آورد به نسبت ۹ و ۱۶ هستند. هر یك از اضلاع مثلث را تعیین کنید.

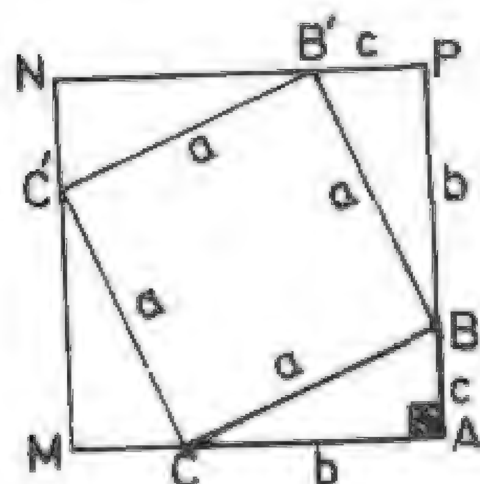
۲ ـ در ذوزنقهٔ متساوی الساقینی اندازه هـای دو قاعده ۱۴ و ۲۶ سانتیمتر و انـدازهٔ هرقطر۲۴ سانتیمتراست، اولا روش ترسیم ذوزنقه را بیان کنید، ثانیاً اندازه‌های ارتفاع وهریك از دوساق را تعیین کنید .

۳ ـ ثابت کنید اگر دوقطر یك ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه برهم عمود باشند، ارتفاع ذوزنقه واسطهٔ هندسی بین دوقاعده است .

۴ ـ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی بریك دایره محیط است، ثابت کنید قطر دایره واسطهٔ هندسی بین دوقاعدهٔ ذوزنقه است .

۵ ـ نقطهٔ P را برنیمدایره‌ای به قطر AB اختیار کرده و از نقطهٔ اختیـاری H واقع برقطر AB عمودی برآن قطر اخراج می‌کنیم تا دوخط AP و BP را به ترتیب درنقاط C و D ونیمدایره را درنقطهٔ F قطع کند، ثابت کنید پاره خط HF واسطهٔ هندسی بین دوپاره خط HC و HD است .

۶ ـ اگر مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه باشد، بااستفاده ازشکل(۲-۱۲) درستی قضیهٔ فیثاغورس را نشان دهید .



شکل (۲-۱۲)

عددهای فیثاغورسی

خواندنی ۲

هرسه عدد حقیقی، درست و مثبت که مربع یکی ازآنها مساوی مجموع مربعهای دوعدد دیگر باشد ، ازآن جهت که اندازه‌های اضلاع یك مثلث قائم‌الزاویه‌اند ، عددهای فیثاغورسی نامیده می‌شوند . مانند اعداد ۳ و ۴ و ۵ وهرمضرب دلخواه آنها چون $3k$ و $4k$ و $5k$.

ریشهٔ اندیشه را دربارهٔ عددهای فیثاغورسی در مصر قدیم باید جستجوکرد. زیرا مسلم است که مصریان با کمك ریسمانهایی با اندازه‌های متناسب با عددهای ۳ و ۴ و۵ مثلث قائم‌الزاویه و درحقیقت زاویه‌های قائمه می‌ساختند. با همان‌اطمینان می‌توان گفت که این کار مصریها مبتنی برتجربه بوده است نه برعلم واطلاع از رابطه‌ای مجرد دربارهٔ مثلث قائم‌الزاویه که در زمانی خیلی دیرتر به وسیلهٔ فیثاغورس مطرح گردید .

عددهای فیثاغورسی به ۳ و۴ و۵ یا مضربهای این سه عدد محدود نیستند . برای تعیین مجموعهٔ اعدادی از این گروه دستورهای کلی می‌توان درنظر گرفت .

فرض می‌کنیم a و b و c سه عدد درست و مثبت مخالف صفر و $a^2=b^2+c^2$ باشد ، در این صورت $a^2-b^2=c^2$ یا $(a+b)(a-b)=c^2$ است . طرف اول این تساوی حاصل ضرب دوعامل است که مساوی یکدیگر نیستند ، (چرا ؟). پس اگر یکی ازآنها مساوی cm باشد دیگری مساوی $\frac{c}{m}$ است و دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر حاصل می‌شود :

$$\begin{cases} a+b=cm \\ a-b=\dfrac{c}{m} \end{cases}$$

ازحل این دستگاه معادله‌ها $a=\dfrac{c(m^2+1)}{2m}$ و $b=\dfrac{c(m^2-1)}{2m}$ به دست می‌آید، اما a درصورتی‌عدد درست است که c مضرب $2m$ یا مضرب m باشد. اگر c مضرب زوج عدد m ، یعنی اگر $c=2km$ باشد .

$$a=k(m^2+1) \quad \text{و} \quad b=k(m^2-1)$$

است وهرمجموعهٔ سه عضوی اعداد a و b و c که ازدستورهای فوق به ازای هردوعدد

درست و مثبت اختیـاری k و $m>1$ به دست می‌آیند یك مجموعهٔ اعداد فیثاغورسی هستند . اگر c مضرب فرد عدد m ، یعنی $c=(2k+1)m$ باشد ،

$$a=\frac{(2k+1)(m^2+1)}{2}$$

است و این عدد درصورتی عدد درست است که m عددی فرد باشد . دراین صورت

$$b=\frac{(2k+1)(m^2-1)}{2}$$

نیز عدد درستی خواهد بود : بنابراین هر مجموعهٔ سه‌عضوی که از دستورهای اخیر به‌ازای هر عدد فرد $m>1$ و عدد درست اختیاری k حاصل شود یك مجموعهٔ اعداد فیثاغورسی است .

از دستورهای بالا با گرفتن $k=0$ و $k=1$ مجموعه‌هایی حاصل می‌شود که عضوهای آن $a=m^2+1$ و $b=m^2-1$ و $c=2m$ یا $a=\frac{1}{2}(m^2+1)$ و $b=\frac{1}{2}(m^2-1)$ و $c=m$ (به‌ازای هرعدد فرد m) می‌باشند.

مشهورترین اعداد این مجموعه به ازای $m=2$ یا $m=3$ به دست می‌آیند که همان سه عدد ۵ و ۴ و ۳ هستند .

از دستورهای دیگر نیز برای تعیین اعداد فیثاغورسی می‌توان استفاده کرد. چنان‌که اگر u و v اعداد درست مثبت و $2uv$ مربع کامل باشد، سه عدد :

$a=u+v+\sqrt{2uv}$ و $b=u+\sqrt{2uv}$ و $c=v+\sqrt{2uv}$ یك مجموعهٔ اعداد فیثاغورسی تشکیل می‌دهند .

تحقیق کنید اگر $u=3$ باشد ، عدد v را چگونه بـاید اختیار کرد تا a و b و c عددهای فیثاغورسی باشند .

فصل سوم

چند ضلعیهای منتظم

(۳ - ۱) - تعریف

چند ضلعی‌منتظم آن است‌که همهٔ اضلاع آن باهم و نیز همهٔ زاویه‌های آن باهم‌مساوی باشند. مانند مثلث متساوی‌الاضلاع‌که سه زاویهٔ آن مساوی یکدیگر و سه ضلعش نیز متساویند. یا مربع ، که چهارضلعی منتظم است . زیرا چهار زاویهٔ آن مساوی هم وچهار ضلع آن نیز مساوی یکدیگرند .

(۳-۲) - خواص چند ضلعیهای منتظم

(۳-۲-۱) - قضیه - هرچند ضلعی منتظم قابل محاط‌شدن دریک دایره است .

برهان - دایرهٔ $C(O,R)$ راکه برسه‌رأس A و B و C چندضلعی می گذرد رسم می کنیم، شکل (۳-۱).

در مثلث OBC داریم :

$$OB=OC \Longrightarrow \angle B_1=\angle C_1$$

و چون $\angle B=\angle C$ است، خواهیم داشت : $\angle B_2=\angle C_2$

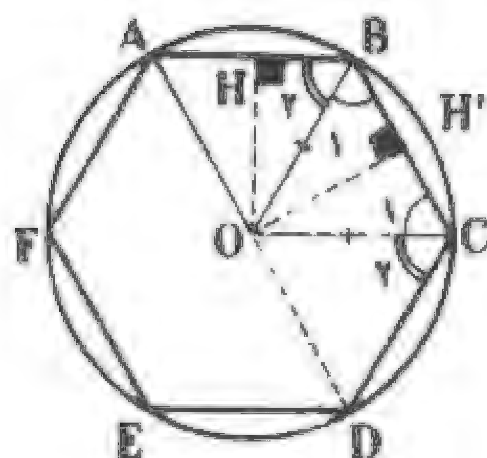
و درنتیجه

$$(AB=CD \text{ و } \angle B_2=\angle C_2 \text{ و } OB=OC) \Longrightarrow \triangle OAB=\triangle OCD$$

و بنابراین :

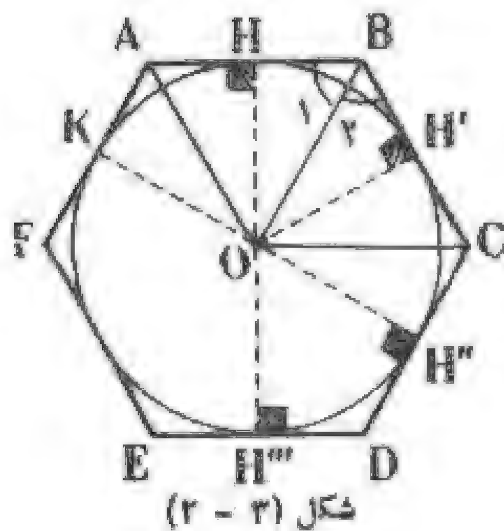
$$OD=OA \Longrightarrow OD=R$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که سایر رأسهای چندضلعی بر دایرهٔ $C(O,R)$ قراردارند. پس چندضلعی در دایرهٔ مزبور محاط است .



شکل (۳ - ۱)

(۳-۲-۲) - قضیه - هرچند ضلعی منتظم قابل محیط‌شدن بریك دایره است .



شکل (۳ - ۲)

برهان- نیمسازهای دوزاویهٔ B و C ازچندضلعی منتظم ... ABCDE یکدیگر را درنقطه‌ای مانند O قطع می‌کنند (چرا ؟)، و این نقطه از سه ضلع AB و BC و CD به یك فاصله است شکل (۳-۲). بنابراین دایره‌ای که به مرکز O و شعاع OH رسم می‌کنیم برسه ضلع مزبور مماس است . اما دومثلث OBC و OAB به حالت (ض ز ض) متساویند ، پس

$$OA=OB=OC$$

و بنابراین نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی چند ضلعی است. از طرفی اضلاع چند ضلعی وترهـای متساوی از این دایره‌اند و ازمرکز آن به یك فاصله‌اند، پس $OH=OH'''$ و دایرهٔ مرسوم برضلع DE نیز مماس است .

به همین ترتیب ثابت می‌شود که همهٔ اضلاع چند ضلعی بردایرهٔ به مرکز O و شعاع OH' مماس هستند، یعنی چند ضلعی محیطی است .

هرچند ضلعیِ منتظم قابل محاط‌شدن در یك دایره وقابل محیط‌شدن بردایرهٔ دیگر است . دایره‌های محاطی ومحیطی چند ضلعی منتظم هم مرکزند. شعاعهایی از دایره‌ها که مرکزمشترك آنها را به رأسهای چند ضلعی وصل می‌کنند باهم زاویه‌هـای مرکزی متساوی تشکیل می‌دهند و زاویه‌های چند ضلعی را نصف می‌کنند .

درهرچند ضلعی منتظم پاره خطهایی‌که مرکز مشترك دایرهٔ محیطی ومحاطی را به رأسها وصل می‌کنند، شعاع دایرهٔ محیطی‌هستند که گاهی با تسامح شعاع چند ضلعی منتظم گفته‌می‌شوند. پاره خطهایی را که از مرکز دایره‌ها براضلاع چند ضلعی عمود رسم می‌شوند و با شعاع دایرهٔ محاطی چند ضلعی مساویند، سهمهای چند ضلعی می‌نامند .

ثابت می‌شود که

(۳-۲-۳)-قضیه- اگردایره‌ای را به چندکمان متساوی تقسیم‌کرده‌و نقاط تقسیم‌را متوالیا باپاره‌ـ خطهایی به هم وصل‌کنیم ، یك چند ضلعی منتظم محاط در دایره پدید می‌آید .

(۳-۲-۴)-قضیه- اگردایره‌ای‌را به‌چندکمان متساوی‌تقسیم کرده‌ودرنقاط تقسیم مماسهایی برآن رسم‌کنیم ، از برخورد مماسهای متوالی با یکدیگر چند ضلعی منتظم محیط بـردایره پدید می‌آید .

اثبات به عهدهٔ دانش‌آموزان است .

بنابراین :

هر دایره قابل‌محیط‌شدن بر یک n ضلعی منتظم و قابل محاط‌شدن در n ضلعی منتظم دیگر است.

(۳-۲-۵)- **اندازهٔ زاویهٔ n ضلعی منتظم** — قبلا ثابت کرده‌ایم که مجموع زاویه‌های درونی هر n ضلعی گوژ، $(۲n-۴)$ زاویهٔ قائمه، یا $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$ است. چون در n ضلعی منتظم زاویه‌ها متساویند، اندازهٔ هر زاویهٔ درونی n ضلعی منتظم $\frac{۱}{n}(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$ یا $\frac{n-۲}{n}\times ۱۸۰^\circ$ است. وچون هرزاویهٔ برونی مکمل یک زاویهٔ درونی آن است، اندازهٔ هرزاویهٔ برونی n ضلعی منتظم $۱۸۰^\circ - \frac{n-۲}{n}\times ۱۸۰^\circ$ یا $\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ است.

تمرین

۱ ـ هریک از عبارتهای زیر را چنان کامل کنید که گزارهٔ درست حاصل شود .

ـ درهرچند ضلعی منتظم همهٔ...ها با یکدیگر و همهٔ...ها نیز باهم مساویند .

ـ مربع یک چهارضلعی .... است .

ـ مستطیل یک چهارضلعی قابل .... دایره است .

ـ لوزی یک چهارضلعی قابل .... دایره است .

ـ هر n ضلعی منتظم دریک دایره .... است .

ـ هرزاویهٔ یک ده ضلعی منتظم مساوی ... درجه است .

۲ ـ کدام‌یک ازگزاره‌های زیر درست وکدام نادرست است ؟

ـ هرچند ضلعی منتظم قابل محیط‌شدن بردایره است .

ـ هرچند ضلعی محاط در دایره یک چند ضلعی منتظم است .

ـ درهرچند ضلعی منتظم محاطی کمانهای نظیر اضلاع ، متساویند .

ـ هرچند ضلعی محیطی یک چند ضلعی منتظم است .

ـ برهرچند ضلعی محاطی یک دایره محیط است .

ـ چند ضلعی درصورتی منتظم است که همهٔ اضلاع آن مساوی یکدیگر باشند .

ـ درهرچند ضلعی منتظم همهٔ اضلاع متساویند .

ـ چند ضلعی محاطی که همهٔ زاویه‌های آن مساوی یکدیگر باشند، یک چندضلعی منتظم است.

۳ ـ بردایره‌ای پنج نقطهٔ A و B و C و D و E را متوالیاً چنان اختیار کرده‌ایم که کمانهای AB و BC و CD و DE هر یك °۷۲ است . آیا چند ضلعی محاطی ABCDE چند ضلعی منتظم است ؟

۴ ـ ثابت کنید :

۱) درهرپنج ضلعی منتظم، هردوضلع مجاور با دوقطرگذرنده از رأسهای غیرمشترك آنها لوزی تشکیل می‌دهند .

۲) هرقطر پنج ضلعی با یکی از اضلاع موازی است.

۳) از تلاقی قطرها با یکدیگر پنج ضلعی منتظم دیگری پدید می‌آید .

۵ ـ اندازه‌های هریك اززاویه‌های چهارضلعی، شش ضلعی، هشت ضلعی، و دوازده ضلعی منتظم را حساب کنید .

۶ ـ ثابت کنید اگر متوازی‌الاضلاعی بردایره محیط باشد، یك لوزی است .

۷ ـ ثابت کنید اگر متوازی‌الاضلاعی در دایره محاط باشد، مستطیل یا مربع است .

۸ ـ ثابت کنید اگر متوازی‌الاضلاعی دریك دایره محاط و بریك دایرهٔ دیگر محیط باشد ، مربع است .

(۳ـ۳) ـ رابطه‌های طولی در چند ضلعیهای منتظم

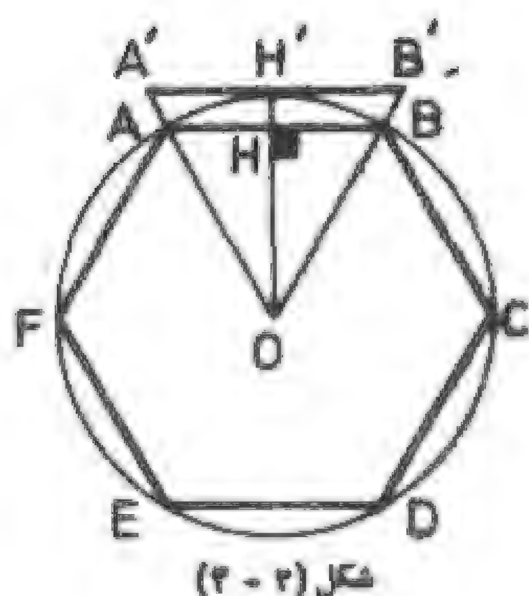
از خواص چند ضلعیهای منتظم راههایی برای ترسیم آنها، همچنین برای محاسبهٔ اجزای آنها ، می‌توان نتیجه گرفت . دراین بخش بعضی از این راهها را مطالعه می‌کنیم.

(۳ـ۳ـ۱) ـ شش ضلعی منتظم ـــ اگر شش ضلعی منتظم ABCDEF در دایرهٔ $C(O,R)$ محاط باشد ، شکل (۳ـ۳)، $\widehat{AB}=\frac{۳۶۰^\circ}{۶}=۶۰^\circ$ و درنتیجه مثلث AOB متساوی‌الاضلاع است . بنابراین $AB=R$ و ازاین ویژگی برای رسم شش ضلعی منتظم محاط در دایره استفاده می‌شود. به این ترتیب که بردایره شش کمان متوالی که اندازهٔ وتر هریك ازآنها مساوی شعاع دایره باشد جداکرده و نقاط تقسیم را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم .

اگر در نقاط تقسیم مماسهایی بردایره رسم کنیم ، از برخورد آنها شش ضلعی منتظم محیط بردایره حاصل می‌شود .

اگر OH ارتفاع مثلث AOB باشد ، $OH=\frac{R\sqrt{۳}}{۲}$ (چرا ؟).

اگر بردایره مماسی موازی وتر AB رسم کنیم و این مماس شعاعهای OA و OB را به ترتیب در نقاط 'A و 'B قطع کند، پاره خط 'A'B ضلع شش ضلعی منتظم محیط بر دایره است (چرا؟). و می‌توان داشت:



شکل (۲ - ۴)

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{OH'}{OH}$$

و چون $AB=R$ و $OH=\frac{R\sqrt{3}}{2}$ و $OH'=R$ است:

$$A'B'=\frac{2}{3}R\sqrt{3}$$

در هندسه معمولاً اندازهٔ ضلع n ضلعی منتظم محاط دریک دایره را با نماد C_n و اندازهٔ ارتفاع یا سهم آن را با r_n و اندازهٔ ضلع n ضلعی منتظم محیط بردایره را با C'_n نمایش می‌دهیم. پس در یک دایره با شعاع R طبق آنچه اثبات شد:

$$C'_6=\frac{2}{3}R\sqrt{3} \;،\; r_6=\frac{R}{2}\sqrt{3} \;،\; C_6=R$$

(۳-۳-۲) ـ صورت کلی محاسبهٔ اضلاع چند ضلعیهای محاطی و محیطی یک دایره

هرگاه AB ضلع n ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ C(O,R) باشد، شکل (۳-۳)، بموجب تعریف $\widehat{AB}=\frac{360^\circ}{n}$ و بنابراین $\widehat{AOB}=\frac{360^\circ}{n}$ و اگر $OH\perp AB$ باشد، $\widehat{HOB}=\frac{360^\circ}{2n}=\frac{180^\circ}{n}$ است؛ درمثلث OHB:

$$HB=OB\times \sin\widehat{HOB}=R\sin\frac{180^\circ}{n}$$

و با ملاحظهٔ آن که $AB=2HB$ است:

$$C_n=2R\sin\frac{180^\circ}{n}$$

در همان مثلث قائم‌الزاویه حاصل می‌شود:

$$r_n=R\cos\frac{180^\circ}{n}$$

و به آسانی ثابت می‌شود که $C'_n = ۲R\,tg\,\frac{۱۸۰^\circ}{n}$

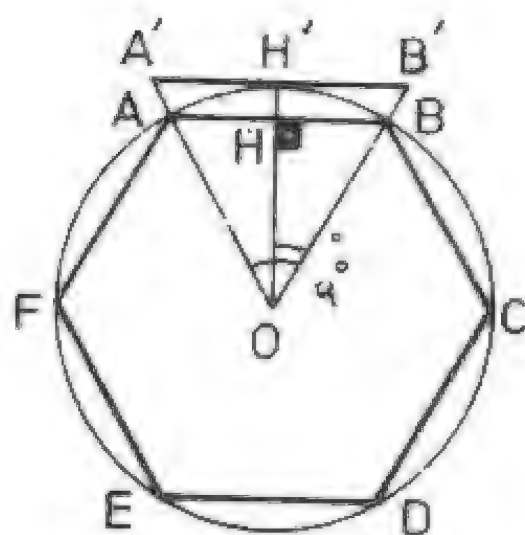
زیرا در مثلث $OH'A'$ داریم :

$$tg\,A'\widehat{O}H' = tg\,\frac{۱۸۰^\circ}{n} = \frac{A'H'}{OH'} = \frac{\frac{C'_n}{۲}}{R}$$

$$C'_n = ۲R\,tg\,\frac{۱۸۰}{n}$$

مثال - می‌دانیدکه $sin۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$ و $cos۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $tg۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است، بنابراین

در شش ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی یك دایره :



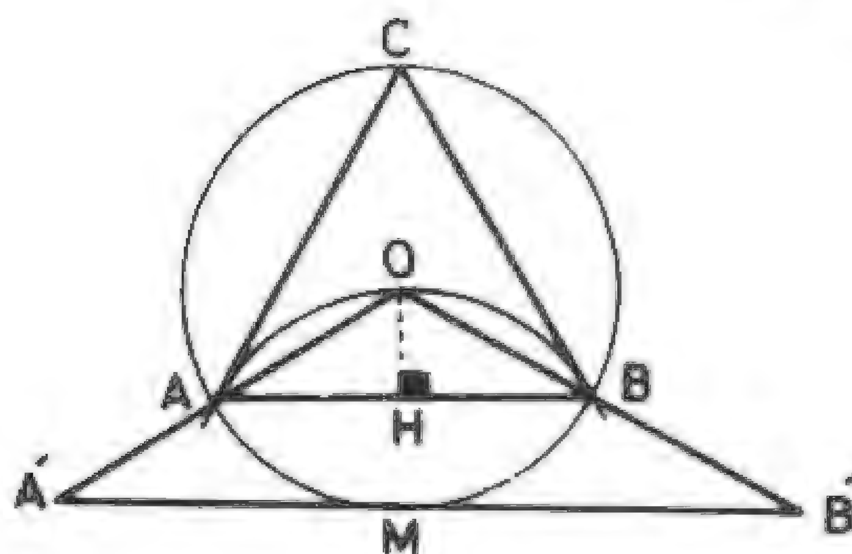
شکل (۳ - ۴)

$$C_۶ = ۲R \times \frac{۱}{۲} = R$$

$$r_۶ = R\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$C'_۶ = ۲R\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

(۳-۳-۳)-مثلثهای متساوی‌الاضلاع محاطی ومحیطی دایره



شکل (۳ - ۵)

برای رسم مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در یك دایره ، باید دایره را به سه کمان‌متساوی‌تقسیم کنیم، برای‌این منظور نقطهٔدلخواه M ازدایره را درنظر گرفته، شکل (۳-۵)، و به مرکز M وشعاع R کمانی‌رسم می‌کنیم تا دایره را دردونقطهٔ A و B قطع کند . AB ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره است. (چرا؟)

اگر OH عمود برAB رسم شود، چون $\widehat{OAH} = ۳۰^\circ$ است، $OH = \frac{R}{۲}$ وبااستفاده

از قضیهٔ فیثاغورس می‌توان داشت: $AH=\frac{R\sqrt{3}}{2}$ و درنتیجه $C_3=AB=R\sqrt{3}$ است
از آنجا $C'_3=A'B'=2R\sqrt{3}$ به دست می‌آید.

یعنی در دایرهٔ به شعاع R :

$$C'_3=2R\sqrt{3} \text{ ، } r_3=\frac{R}{2} \text{ ، } C_3=R\sqrt{3}$$

با استفاده از دستورهای کلی نیز با ملاحظهٔ آن‌که $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ و $tg 60^\circ=\sqrt{3}$ است، اضلاع مثلثهای محاطی ومحیطی دایره با شعاع R و سهم‌مثلث‌متساوی‌الاضلاع محاطی به همین صورت به دست می‌آیند.

تمرین

۱ ـ اندازه‌های سهم وشعاع مثلث متساوی‌الاضلاع وشش ضلعی منتظم محاطی ومحیطی دایره‌ای به شعاع ۱۲ سانتیمتر، همچنین مساحت هریك از این شکلها را حساب‌کنید.

۲ ـ در مثلث متساوی الاضلاعی اندازهٔ هر ضلع آن ۱۲ سانتیمتر است، اندازه‌های شعاعهای دایره‌های محاطی ومحیطی آن را تعیین‌کنید.

۳ ـ با استفاده از دستورهای مربوط به محاسبهٔ اضلاع چند ضلعیهای محاطی و محیطی دایره، اندازه‌های اضلاع مربعهای محاطی و محیطی دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر را حساب‌کنید.

۴ ـ هریك از عبارتهای زیر را چنان‌کامل‌کنیدکه یك‌گزارهٔ درست حاصل شود.

ـ هرچند ضلعی منتظم بریك دایره ... ودریك دایره ... است، نسبت شعاعهای دو دایره درشش ضلعی منتظم برابر است با ....

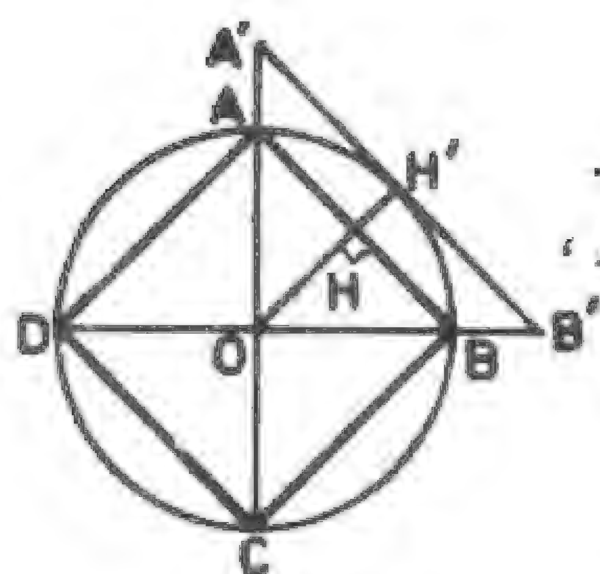
ـ مرکزهای دایره‌های محاطی ومحیطی هرچند ضلعی منتظم ....

۵ ـ اضلاع شش ضلعیهای منتظم محاطی ومحیطی دایره‌ای به شعاع ۱۵ سانتیمتر نظیر به نظیر موازی یکدیگرند، مساحت سطح محصور بین دوچند ضلعی را حساب‌کنید. صورت‌کلی مساحت سطح مزبوررا برحسب R شعاع دایره تعیین‌کنید. آیا اگراضلاع شش ضلعیها موازی نباشند، این مساحت تغییر می‌کند؟

(۴-۳-۳) ـ مربعهای محاطی ومحیطی دایره

برای‌رسم مربع محاط در دایرهٔ $C(O,R)$ قطر AC از دایره را رسم کرده، شکل(۳-۶)، وقطر BD را بر آن عمود می‌کنیم، این دو قطر دایره را به چهار کمان متساوی تقسیم می‌کنند

(چرا ؟). از وصل کردن نقاط متوالی تقسیم به یکدیگر مربع ABCD پدید می‌آید که در دایره محاط است .



شکل (۳-۶)

اگر درنقاط تقسیم مماسهایی بردایره رسم کنیم ، از برخورد آنها مربعی پدید می‌آید که بردایره محیط است .

حال ملاحظه می‌کنیم که درمثلث قائم‌الزاویهٔ AOB ،

$$AB^2=OA^2+OB^2=2R^2 \Longrightarrow AB=R\sqrt{2}$$

اگر OH ارتفاع نظیر رأس O از این مثلث باشد :

$$OH=\frac{AB}{2}=\frac{R\sqrt{2}}{2} \quad \text{(چرا ؟)}$$

و به موجب استدلالی مشابه آنچه قبلا ذکرشد ، ثابت می‌شود که $A'B'=2R$.

بنابراین در دایرهٔ به شعاع R

$$C'_4=2R \ , \ r_4=R\frac{\sqrt{2}}{2} \ , \ C_4=R\sqrt{2}$$

(۳-۴) ـ محیط و مساحت دایره

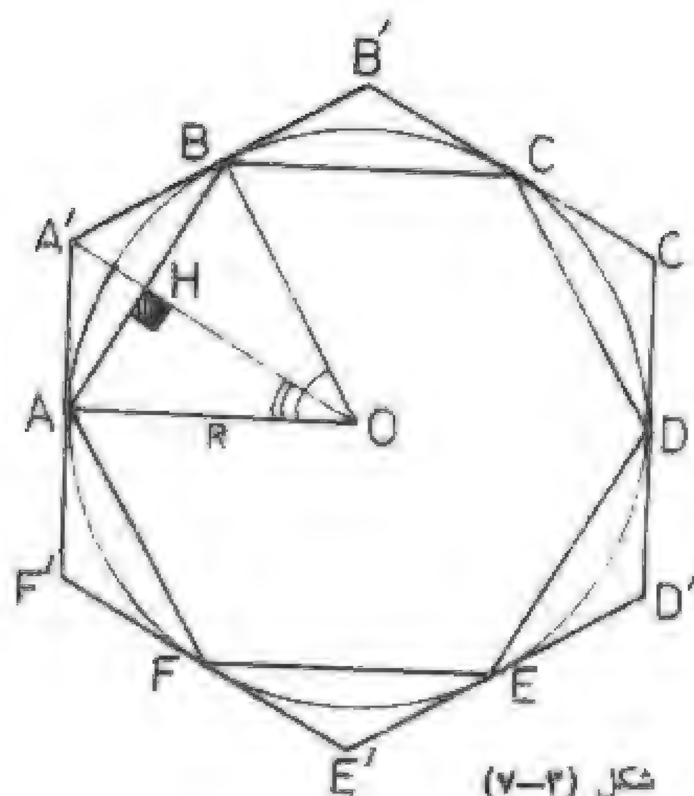
(۳-۴-۱) ــ محیط دایره

ثابت می‌شود که در هر دایره داده شده ، محیط هرچند ضلعی محاطی کوچکتر از محیط هر چند ضلعی محیطی است و در نتیجه دست کم یك عدد یافت می‌شود که از همه محیطهای چندضلعی‌های محاطی بزرگتر و از همه محیطهای چند ضلعی‌های محیطی کوچکتر است . قضیه زیر نشان می‌دهد که چنین عددی یکتا است.

(۳-۴-۲)ـ قضیه ـ تنها یك عدد پیدا می‌شود که ازهمه‌محیطهای چندضلعیهای محاط دریك دایره داده شده بزرگتر و از همه محیطهای چند ضلعیهای محیطی (آن دایره) کوچکتر باشد.

برهان ــ n ضلعیهـای منتظم محاطی و محیطی دایرهٔ $C(O,R)$ درشکل (۳- ۷) را در نظر گرفته پاره‌خطهای OA و OH سهمهای آنها را رسم می‌کنیم .

اگر P_n و P'_n به ترتیب محیطهـای دوچند ضلعی باشند :



شکل (۳—۷)

$$P_n = ۲n.AH$$

$$P'_n = ۲n.AA'$$

و بنابراین :

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{AH}{AA'}$$

اما دومثلث OAA' و OHA متشابهند، (چرا ؟)، درنتیجه $\frac{AH}{AA'} = \frac{OH}{OA}$ و با ملاحظهٔ آن‌که $OA = R$ و $OH = R\cos\frac{۳۶۰^\circ}{۲n}$ است می‌توان نوشت :

$$\frac{AH}{AA'} = R\cos\frac{۳۶۰^\circ}{۲n} : R = \cos\frac{۳۶۰^\circ}{۲n}$$

یا

$$\frac{P_n}{P'_n} = \cos\frac{۳۶۰^\circ}{۲n}$$

اما هرقدرعدد صحیح n بزرگ شود، زاویهٔ $\frac{۳۶۰^\circ}{۲n}$ کوچکتر و کسینوس آن‌که همواره از عدد یك کوچکتر است، بزرگ می‌شود و به‌عدد یك نزدیکترمی‌شود. پس کسر $\frac{P_n}{P'_n}$ نیز وقتی که n بزرگ‌می‌شودبه‌عدد۱ نزدیك می‌شود. بنابراین P_n و P'_n می‌توانند به‌هراندازه دلخواه به‌یکدیگر نزدیك شوند. این نشان می‌دهد که تنها یك عدد می‌تواند از همه محیطهای چند ضلعیهای محاطی بزرگتر و از همه محیطهای چند ضلعیهای محیطی کوچکتر باشد.

تعریف — محیط هر دایره برابر است با عددی که از همه محیطهای چند ضلعیهای محاط در آن دایره بزرگتر و از همه محیطهای چند ضلعیهای محیطی آن دایره کوچکتر است. محیط دایره با همان واحدی اندازه گیری می‌شود که محیط چند ضلعیها اندازه گیری شده‌اند.

تمرین

۱ ـ محیطهـای ۸ ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی دایره‌ای به شعاع ۱۲ سانتیمتر را حساب کنید. نصف مجموع این دو محیط را تعیین کنید و اختلاف آن را با محیط دایره بـدست آورید.

۲ ـ ثابت کنید مساحت شش ضلعی منتظم محاط در یك دایره واسطهٔ هندسی است بین مساحتهای مثلثهای متساوی‌الاضلاع محاطی و محیطی همان دایره .

محاسبهٔ محیط دایره

(۳-۴-۳)ـقضیه ـ نسبت محیط هردایره‌به‌اندازه قطر آن مقدار ثابتی است .

برهان ـ اگر دودایره‌که اندازهٔ شعاعهای آنها R و R' است درنظر بگیریم، محیطهای n ضلعیهای منتظم محاط درآنها به ترتیب :

$$P_n = ۲nR \sin\frac{۳۶۰^\circ}{۲n} \quad \text{و} \quad P'_n = ۲nR' \sin\frac{۳۶۰^\circ}{۲n} \quad (\text{چرا ؟})$$

و نسبت آنها

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{R}{R'}$$

است ، یعنی نسبت محیطهای n ضلعیهای محاط در دودایره مقداری ثابت و مساوی نسبت شعاعهای آنهاست . وقتی n عدد بسیاربزرگ باشد P_n و P'_n به محیطهای دودایره نزدیك می‌شوند. پس اگرمحیطهای دودایره را با C و C' نمایش دهیم خواهیم داشت :

$$\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}$$

این تساوی را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\frac{C}{۲R} = \frac{C'}{۲R'}$$

یعنی: نسبت محیط دایره به قطرآن درهمهٔ دایره‌ها یکی است ومقداری ثابت دارد. این مقدار ثابت یك عددگنگ است‌که تا یك ده هزارم تقریب ۳/۱۴۱۶ می‌باشد .

اندازهٔ واقعی نسبت‌محیط‌دایره را به قطرآن‌درکتابهای‌ریاضی‌باحرف‌یونانی π نشان‌می‌دهند.

تعیین عدد π سابقهٔ تاریخی جالب دارد و برای این منظور ریاضیدانان روشهای مختلف به‌کاربرده وکوششهای بسیار داشته‌اند. یکی ازروشهای ابتدایی‌محاسبهٔ π را ضمن‌خواندنیهای خارج از متن کتاب ارائه نموده‌ایم .

از آنچه ذکر شد می‌توان نتیجه‌گرفت :

(۳-۴-۴)-قضیه ـ محیط هر دایره مساوی‌حاصل‌ضرب اندازهٔ قطر آن دایره در عدد π است. یعنی اگر محیط دایره‌ای به شعاع R را با نماد C نمایش دهیم:

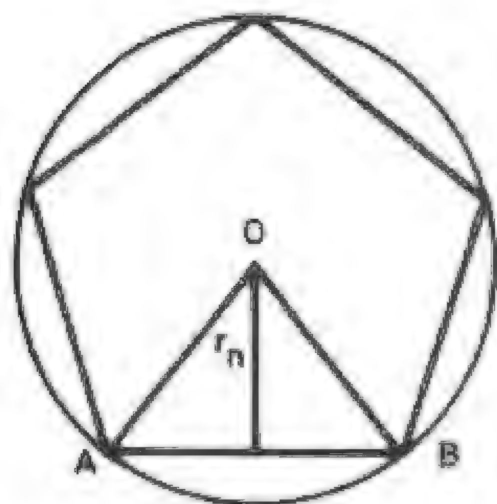
$$C = ۲\pi R$$

(۳-۴-۵) ـ مساحت دایره

از خاصیتهای مساحت که درسال گذشته دیدیم به سادگی نتیجه می‌شود که مساحت هر چند ضلعی محاط در یك دایره ازمساحت هرچندضلعی محیط برهمان دایره کوچکتر است، وازخاصیت‌های عددهای حقیقی نیز نتیجه می‌شود که دست‌کم یك عدد یافت می‌شود که از همه مساحتهای‌چند ضلعیهای محاط درآن دایره بزرگتر و ازهمه مساحتهای چند ضلعیهای محیط برآن دایره کوچکتر است. قضیه زیر نشان می‌دهد که چنین عددی یکتا است.

(۳-۴-۶)- قضیه - تنها یك عدد یافت می‌شود که از همه مساحتهای چندضلعیهای محاطی در یك دایره بزرگتروازهمه مساحتهای چندضلعیهای محیط برآن دایره‌کوچکتر است.

برهان ـ مساحت هر n ضلعی منتظم برابر است با حاصلضرب محیط آن در نصف اندازه سهم، زیرا در شکل زیر مساحت مثلث OAB برابر است با حاصلضرب AB در نصف سهم چند ضلعی و بنابر این مساحت n ضلعی منتظم برابر است با $(\frac{۱}{۲}n\cdot AB)\cdot r_n$ که $n.AB$ محیط چندضلعی و r_n سهم‌آن‌است. بنابراین S_n و S'_n (مساحتهای n ضلعیهای منتظم محاطی ومحیطی در دایره بشعاع R) به ترتیب با عددهای $\frac{۱}{۲}P_n R\cos\frac{۱۸۰}{n}$ و $\frac{۱}{۲}P'_n R$ برابرند. بنا به آنچه پیشتر دیدیم هنگامی‌که n بزرگ می‌شود $\cos\frac{۱۸۰}{n}$ و $\frac{P_n}{P'_n}$



شکل (۳-۸)

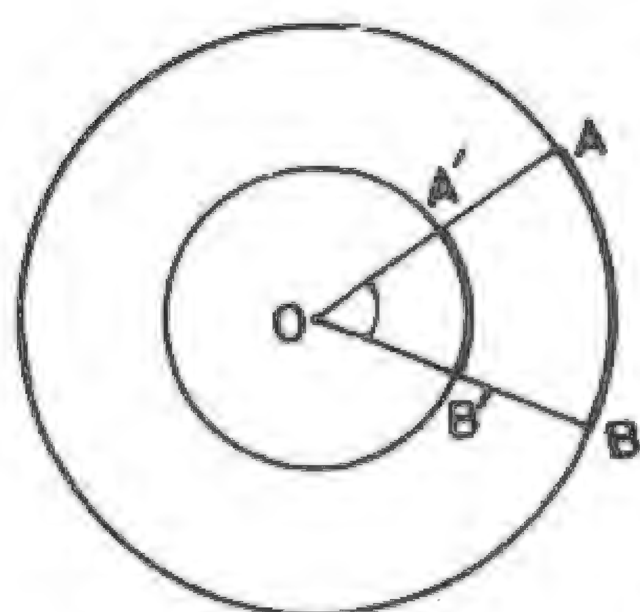
هردو به‌عدد ۱ نزدیك‌می‌شوند. درنتیجه $\frac{S_n}{S'_n}$ نیز به‌عدد ۱ نزدیك می‌شود. این نشان می‌دهد که **تنها یك عدد می‌تواند از همه مساحتهای چندضلعیهای محاطی دایره بزرگتر و از همه مساحتهای چند ضلعیهای محیطی دایره کوچکتر باشد.**

تعریف ــ عدد یکتایی که از همه مساحتهای چند ضلعیهای محاطی دریك دایره بزرگتر و از همهٔ مساحتهای چندضلعیهای محیط بر آن دایره کوچکتر است،مساحت آن‌دایره نامیده می‌شود. مساحت دایره با همان واحد اندازه گیری سنجیده می‌شود که مساحتهای چند ضلعیها سنجیده شده‌اند.

(۳-۴-۷) ـ قضیه ـ مساحت هر دایره برابر است با حاصلضرب توان دوم شعاع در عدد π

برهان ــ فرض کنیم شعاع دایره برابر با R است. در برهان قضیه پیش دیدیم که با بزرگ شدن n عددهای S_n و S'_n بهر اندازه دلخواه به‌یکدیگر نزدیك‌می‌شوند؛ وچون مساحت دایره همواره بین S_n و S'_n قرار دارد، پس عددهای S_n و S'_n به هر اندازه دلخواه به مساحت‌دایره نزدیك‌می‌شوند. اما $S'_n=\frac{1}{2}RP'_n$ که با بزرگ شدن n به‌عدد $\frac{1}{2}R(2\pi R)$ (به هر اندازه دلخواه) نزدیك می‌شود. بنابراین $\pi R^2=$مساحت دایره

(۳-۵) ـ رادیان ،واحد دیگر اندازه‌گیری کمانها



شکل (۳ - ۹)

(۳-۵-۱) ـ **تعریف** ـ رادیان اندازهٔ کمانی ازهردایره است‌که درازای آن مساوی اندازهٔ شعاع دایره باشد.

اگرقطعهٔ ریسمانی به اندازهٔ شعاع دایره بریده و آن را دقیقاً برکمانی از دایره قرار دهیم تاآن‌کمان را بپوشاند، اندازهٔ‌کمانی راکه بین دوسر این ریسمان محدود است، یك «رادیان» می‌گوییم.

درازای‌کمانی که اندازهٔ آن یك رادیان باشد در دایره‌های مختلف متفاوت است و این موضوع را در دایره های هم مرکز، شکل (۳- ۹)، بهخوبی می‌توان دید.

می‌دانید که اندازهٔ محیط هردایره به شعاع R مساوی $2\pi R$ است. پس نسبت درازای یك دور کامل دایره، به کمانی که درازای آن مساوی شعاع دایره باشد 2π است. از این رو اندازهٔ نیم‌دایره را برحسب رادیان با π و اندازهٔ ربع دایره را با $\frac{\pi}{2}$ نشان می‌دهیم.

(۳-۵-۲) ـ **تبدیل رادیان به دیگر واحدهای اندازه‌گیری کمانها** ـ اگراندازهٔ $\widehat{AB}$ برحسب رادیان r و برحسب درجه D باشد، با ملاحظهٔ آن‌که هررادیان $\frac{1}{2\pi}$ و هردرجه $\frac{1}{360}$اندازهٔ

یک دور کامل دایره است ، اندازهٔ $\widehat{AB}$ برحسب دور کامل دایره ازطرفی $\frac{r}{2\pi}$ و از طرفی $\frac{D}{360}$ است ، بنابراین :

$$\frac{r}{2\pi}=\frac{D}{360}$$

یعنی بین اندازه‌های یک‌کمان برحسب رادیان و درجه رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\boxed{\frac{r}{\pi}=\frac{D}{180}}$$

به‌کمک این رابطه وقتی اندازهٔ‌کمان را برحسب یکی از دوواحد داشته باشیم ، اندازهٔ آن برحسب واحد دیگر به دست می‌آید .

مثال - اندازهٔ‌کمان 60° برحسب رادیان از رابطهٔ بالا به صورت $r=\frac{\pi}{3}$ به دست‌می‌آید.

(۳-۵-۴) - **محاسبهٔ درازای کمان دایره** - ازآنچه ذکر شد می‌توان نتیجه‌گرفت‌که اگراندازهٔ کمانی برحسب رادیان مساوی α باشد، درازای آن از دستور زیر به دست می‌آید :

$$\boxed{l=R\alpha}$$

مثال - درازای نیم‌دایره‌ای به شعاع R مساوی $R\pi$ و درازای‌کمان 60° همان دایره $\frac{R\pi}{3}$ است .

تمرین

۱ - دودایرهٔ هم‌مرکز به شعاعهای R و R' مفروضند ، مساحت سطح محصوربین آنهارا تعیین کنید .

۲- مساحت دایره‌ای به شعاع ۱۲ سانتیمتررا حساب‌کنید . اختلاف بین مساحت این دایره را با مساحت هشت ضلعی منتظم محاط درآن تعیین‌کنید :

$$\left(\sin 22^\circ 30'=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

۳ - در دایرهٔ به شعاع ۱۲ سانتیمتر درازای کمانی را که اندازهٔ آن برحسب رادیان $\frac{\pi}{8}$ است تعیین کنید .

۴ - دوقطر AB و CD از دایرهٔ $C(O,R)$ بریکدیگر عمودند. بمرکز C وشعاع CA

کمانی از دایره رسم می‌کنیم که در درون دایره و به دو نقطه A و B از دایره محدود باشد. بین این کمان و نیمدایره‌هایی که با آن کمان در نقاط A و B تلاقی کرده‌اند سطحهایی محصور می‌شوند، مساحت هریك از این دوجزء دایره را تعیین کنید.

۵- مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است. به قطرهای AB و AC دونیمدایره در خارج مثلث رسم می‌کنیم. بین این نیمدایره‌ها و دایرهٔ محیطی مثلث دو سطح هلالی شکل پدیدمی‌آیند. ثابت کنید مجموع مساحتهای سطحهای هلالی‌شکل مزبور بامساحت مثلث‌متساوی‌است.

۳

سخنی در بارهٔ عدد π خواندنی

قدیمترین سابقهٔ تاریخی در بارهٔ عدد π پاپیروسی‌است که اکنون درمسکو نگهداری می‌شود، در این سند محاسبهٔ محیط دایره به وسیلهٔ مصریان داده شده است . به موجب این محاسبه نسبت محیط دایره به قطرآن مساوی ۳ است . در محاسبات بابلیان نیز این نسبت ۳ گرفته شده است . بـه اغلب احتمال این نسبت را از کوششهای تجربی نتیجه گرفته‌اند و مبنای دقیق علمی نداشته است . نخستین ریاضی‌دانی کـه در بارهٔ عدد π براساس تفکرریاضی‌پژوهشهایی انجام‌داد بقراط بودکه درسدهٔ پنجم پیش‌ازمیلاد می‌زیست. وی دریافت‌که مساحتهای دودایره با مربعهای قطرهای آنها متناسبند .

ارشمیدس ، نابغهٔ علم، به‌ثابت‌بودن نسبت‌محیط دایره به‌قطرآن پی برد وبه‌کمك ۹۶ ضلعی‌منتظم محاط در دایره این نسبت را بین $۳\frac{۱۰}{۷۰}$ و $۳\frac{۱۰}{۷۱}$ تعیین‌کردکـه به مقدار واقعی π بسیارنزدیك است .

درجریان دگرگونیهای علوم‌ریاضی، دانشمندان بسیاربرای‌محاسبهٔ عدد πصرف‌وقت کرده‌اند . تیکوبراهه منجم معروف دانمارکی درحدود ۴۰۰ سال پیش درمحاسبات خود برای محاسبهٔ π به‌عدد ۳/۱۴۰۹ رسید. مقارن همین اوقات فرانسوا ویت (François Viète) ریاضی‌دان معروف فرانسوی به‌کمك ۳۹۳۲۱۶ ضلعی منتظم مقدار π را تا ۹ رقم اعشار حساب‌کرد .

ریاضی‌دان نامدار ایرانی غیاث‌الدین جمشیدکاشانی (۷۶۳-۸۰۷ هجری)، که در نجوم و حساب ابتکارهای بسیارجالب داشته است ، درحدود یك قرن ونیم پیش از ویت درکتاب «رسالهٔ محیطیه» نسبت‌محیط‌دایره برقطرآن را تا بیش‌از۱۵ رقم اعشارحساب‌کرده بود . نتیجهٔ این محاسبه چنین بوده است: ۳/۱۴۵ ،۷۹۲ ،۶۵۳ ،۵۸۹ ، ۷۹۳

در ادوار اخیر با پیدایش حساب دیفرانسیل وانتگرال وبا استفاده‌ازرشته‌های عددی نـامتناهی در محاسبهٔ عدد π پیشرفتهای قابل ملاحظه حاصل شد.بااین روشها ، با زحمت خیلی کمتر عدد π را بـا دقت به مراتب بیشتر تعیین می کنند . درسال ۱۸۷۴ میلادی ویلیام شنك انگلیسی‌عدد π را با ۷۰۷ رقم دهدهی‌حساب‌کرد. این‌عدد درقصراکتشافات پاریس درغرفهٔ مربوط به علوم ریاضی‌به صورت نواری دورتا دور تالارنوشته شده است.

درقرن اخیر در سال ۱۳۳۲ با استفاده از ماشینهای حسابگر الکترونیکی بیش‌از ۳۰۰۰ رقم دهدهی عدد π را تعیین کردند. روشن است‌که این محاسبه بیشتر جنبهٔ تفنن دارد و نمودار قدرت وارزش روشهای جدید است، زیرا با همهٔ پیشرفتهای صنعتی وعلمی امروز در عمل برای دقیق‌ترین و حساسترین کاربردهای محاسبه تنها ده رقم دهدهی اول بعداز ممیز عدد π از اعتبار و دقت کافی بهره‌مند است.

دربارهٔ وجه نامگذاری این عدد باید گفت کـه نماد π برای «نسبت محیط دایره به قطر آن» ازاوایل قرن هجدهم به‌کار رفته وبه‌این مناسبت بودکه واژهٔ محیط در زبان یونانی با حرف π شروع می‌شود. اما به طوری کـه ذکر شد توجه به این عدد سابقهٔ قدیمتر دارد و آن چنان مشغلهٔ فکری انسان متمدن بوده است.که دربارهٔ آن در تاریخ زندگی علمی ملل داستانها آمده و افسانه‌ها و شعرها گفته‌اند. از آن جمله در زبانهای مختلف شعرهایی‌گفته‌اندکه با کلمات و حروف آن رقمهایی ازعدد π مشخص می‌شود و برای به خاطرسپردن این عددبسیارمفید است. قدیمیترین شعر دراین زمینه به زبان‌فرانسه سروده شده است وچنین است:

«Que J'aime à faire apprendre un nombre Utile aux sages

Immortel Archimède, artiste, ingenieur

Qui de ton jugement peut priser la valeur ?

Pour moi ton problème est de pareils avantages»

شمارش تعداد حرفهای کلمات این متن عدد π را به صورت زیر با سی رقم اعشار نشان می‌دهد.

۳/۱۴۱ ۵۹۲ ۶۵۳ ۵۸۹ ۷۹۳ ۲۳۸ ۴۶۲ ۶۴۳ ۳۸۳ ۲۷۹

در زبان فارسی شعر زیر دراین زمینه سروده شده است:

گر کسی ازتو بپرسد ره آمختن π	پاسخی ده که خردمند ترا آموزد
«خرد وبینش و آگاهی دانشمندان	ره سرمنزل توفیق به ما آموزد»

تعداد حروف کلمه‌های بیت دوم شعر، عدد π را با ده رقم اعشار مشخص می‌کند.

فصل چهارم

خط و صفحه در فضای سه بعدی اقلیدسی

(۴-۱) - کلیات

(۴-۱-۱) - فضای سه بعدی اقلیدسی - فضائی که در آن زندگی می کنیم مدلی از فضای اقلیدسی یا فضای سه بعدی است . فضای سه بعدی اقلیدسی یکی از مفهومهای نخستین (تعریف نشده) می‌باشد و در این کتاب همه جا منظور ما از فضا همان فضای سه بعدی اقلیدسی است. فضا مجموعه‌ای از بی‌نهایت نقطه می‌باشد ، خط و صفحه نیز که به ترتیب دارای یك بعد و دو بعد می باشند هر يك زیرمجموعه‌ای از فضا می‌باشند .

(۴-۱-۲)- نیم فضا - مجموعه همه نقطه‌هایی که در يك طرف يك صفحه قرار دارند يك نیم فضا نامیده می‌شود هر نیم فضا صفحهٔ مشخص کنندهٔ خود را که مرز آن نیم فضا نامیده می‌شود در بردارد. ویژگیهای زیر بدیهی هستند:

(الف) - هرگاه دوسر پاره خطی دریك نیم فضای داده شده باشند، همه آن پاره خط در آن نیم فضا است.

(ب)- هرگاه از دوسر پاره‌خطی فقط یکی در یك نیم‌فضای داده شده باشد ، آن پاره‌خط مرز نیم‌فضا را تنها در يك نقطه قطع می کند .

اگر صفحه $\mathbf{P}$ و نقطه $\mathbf{A}$ غیر واقع بر آن داده شده باشند، نیم فضایی‌که با $\mathbf{P}$ مشخص می‌شود و $\mathbf{A}$ را در بر دارد با نماد $\mathbf{A}$ و $\mathbf{P}]$ نمایش داده می‌شود.

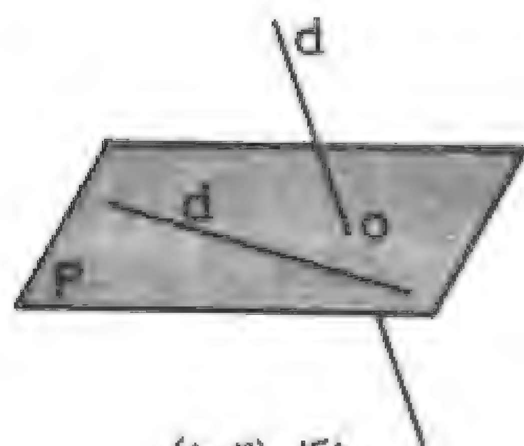
(۴-۲) - اوضاع نسبی دوخط در فضا

۱) دوخط که تنها دریك نقطه مشترك باشند ، **خطهای متقاطع** نامیده می‌شوند .

۲) دوخط متمایز که دریك صفحه باشند و نقطهٔ مشترك نداشته باشند ، **خطهای موازی** گفته می‌شوند . ·

۳) دوخط متمایز که نقطهٔ مشترك نداشته و در يك صفحه نیز واقع نباشند ، **متنافر** نامیده می‌شوند شکل (۴-۱) ·

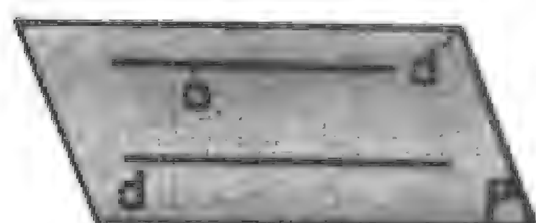
هرخط d و یك نقطهٔ O واقع درخارج آن خط یك صفحه مانند P مشخص می‌کنند ، (چرا ؟) شکل (۴-۲)، دراین صفحه برنقطهٔ O یك خط وفقط یك‌خط موازی خط d مرور می‌کند (اصل اقلیدس) . هرخط دیگری که برنقطهٔ O بگذرد و در صفحهٔ P نباشد ، موازی خط d نیست (چرا ؟).



شکل (۴-۱)

بنابراین :

برهرنقطهٔ واقع در خارج یك خط ، فقط یك خط موازی‌آن مرور می‌کند، واین صورت‌کنی اصل اقلیدس درمورد هرخط ونقطهٔ دلخواه از فضاست .



شکل (۴-۲)

با ملاحظهٔ آن‌که انطباق دوخط را نیز حالت خاصی از توازی‌گرفته‌ایم، اصل اقلیدس را به صورت‌کلی‌تر زیر نیز می‌توان بیان‌کرد :

برهرنقطه تنها یك خط موازی خط مفروض مرور می‌کند .

از آنچه ذکر شد می‌توان نتیجه‌گرفت‌که

اگر دوخط متوازی‌باشند ، هرصفحه‌که بریکی ازآن دوخط و نقطه‌ای ازخط دیگربگذرد، همهٔ نقاط خط دوم را شامل خواهد بود، زیرا درغیراین صورت دوخط متمایز مفروض متنافرند نه متوازی .

(۴-۳) ــ اوضاع نسبی خط و صفحه

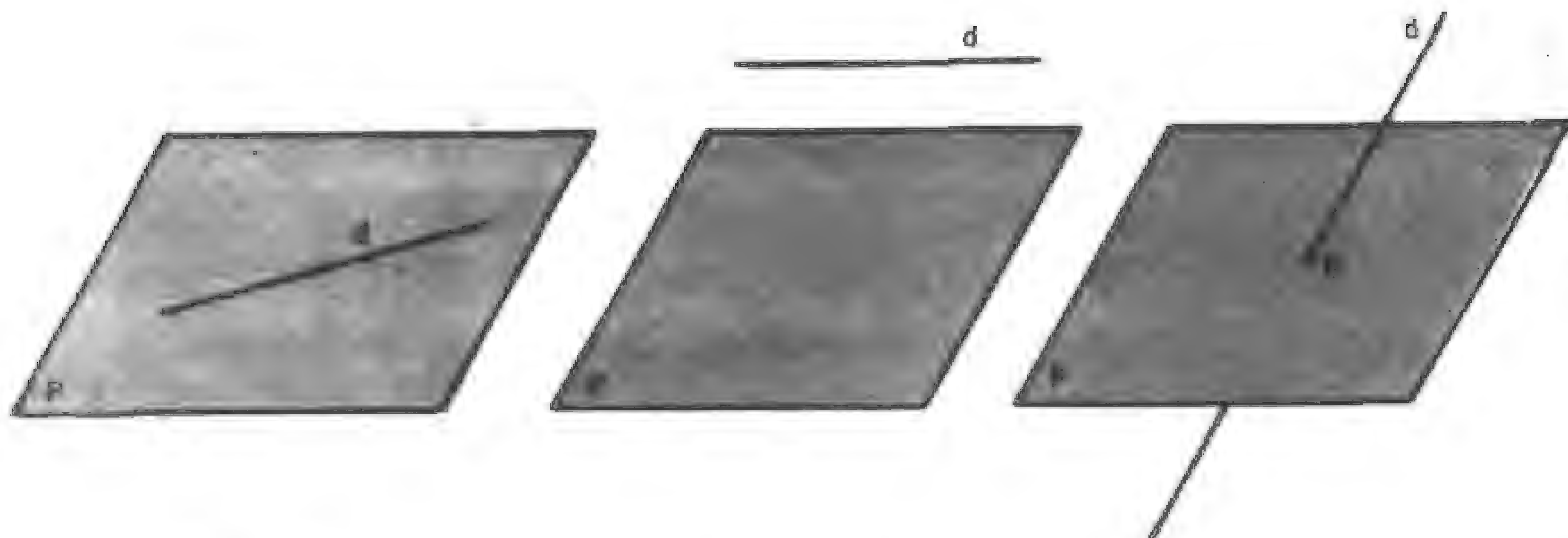
هرگاه صفحهٔ P وخط راست d بعنوان مجموعهٔ نقاط درنظرگرفته شوند، وضع خط و صفحه نسبت به هم از سه حال خارج نیست :

۱ــ اشتراك دومجموعه ، مجموعه‌ای شامل تنها نقطه O است. دراین صورت گوییم خط d و صفحه P در نقطهٔ O متقاطعند (شکل ۴-۳).

۲ــ دو مجموعه عضو مشترك ندارند، یعنی اشتراك آن مجموعه تهی است (شکل ۴-۴).

۳ــ اشتراك دو مجموعه بیش از یك عضو دارد. در این صورت به موجب خاصیت اصلی صفحه، همه نقطه‌های خط d برصفحهP واقعند یعنی خط d برصفحه P واقع است (شکل۴-۵)

تعریف ــ یك خط را موازی یك صفحه می‌گوییم هرگاه برآن صفحه منطبق باشد یا باآن صفحه اصولا نقطهٔ مشترك نداشته باشد (حالتهای ۲ و ۳).



شکل (۴-۳)　　شکل (۴-۴)　　شکل (۴-۵)

دراین حالت صورت نمادی توازی خط وصفحه چنین است :

$$(d \subset P \text{ یا } d \cap P = \phi) \Longrightarrow d \parallel P$$

اگر توازی خط وصفحه به صورت فوق درنظر گرفته شود، وضع نسبی خط وصفحه‌شامل دوصورت خواهد بود ؛

- خط وصفحه متوازیند .
- خط وصفحه متقاطعند .

تمرین

۱- صفحهٔ P و نقطهٔ O روی آن مفروضند، نیم‌خط OM نسبت به صفحهٔ P چه وضعهایی می‌تواند داشته باشد ؟

۲- صفحهٔ P و نقطهٔ O روی P و نقطهٔ M خارج P مفروضند. نیم خط OM نسبت به‌نیم فضایی که M را در بر ندارد چه وضعی دارد.

۳- صفحهٔ P و $O \in P$ مفروضند وخط d برO می گذرد. اگر $d \parallel P$ باشد، وضع مجموعهٔ نقاط خط و صفحه را بیان‌کنید

(۴-۴) - اوضاع نسبی دوصفحه

(۴-۴-۱) - فصل مشترك دو صفحه - طبق اصول خوانده شده ، سه نقطهٔ غیر واقع بر یك خط راست یك صفحه مشخص می‌کند . اکنون ثابت می‌کنیم که این صفحه منحصر به یکی است.

یعنی :

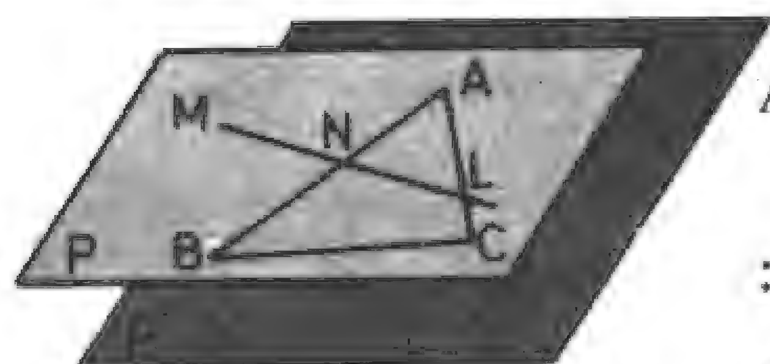
(۴-۴-۲)-قضیه- بر سه نقطه غیر واقع بر یك خط راست فقط یك صفحه می‌گذرد.

برهان - ثابت می کنیم که هر دو صفحه مانند P و 'P، که سه نقطهٔ غیر واقـع بر یك خط راست، مانند A و B و C را شامل بـاشند، بر یکدیگر منطبق هستند، یعنی در شکل (۴-۶).

$$(A, B, C \in P \text{ و } A, B, C \in P' \text{ و } C \notin AB) \Rightarrow P = P'$$

اگر نقطهٔ M از P را به‌نقطهٔ N روی AB و بین A و B وصل کنیم ، خواهیم داشت

$$MN \subset P$$



شکل (۴-۶)

خط MN دست‌کم یکی از دو خط BC و AC را قطع می کند، (چرا؟)

اگر این خط مثلا AC را در نقطهٔ L قطع کند:

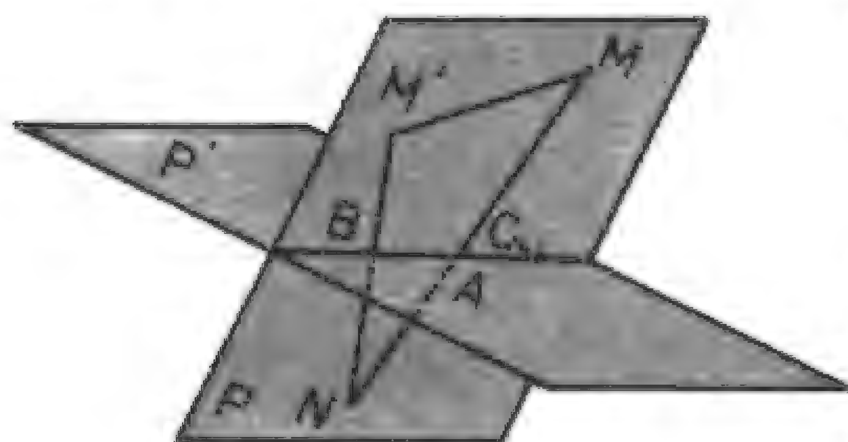
$$\left.\begin{array}{l} AB \subset P' \Rightarrow N \in P' \\ AC \subset P' \Rightarrow L \in P' \end{array}\right\} \Rightarrow LN \subset P'$$

و چون M بر امتداد LN قرار دارد ، $M \in P'$ یعنی : هر نقطهٔ M ازصفحهٔ P نقطه‌ای ازصفحهٔ 'P است .

بـا همین روش ثابت می‌شود که هـر نقطهٔ 'M از صفحهٔ 'P بر صفحهٔ P واقع است. پس صفحهٔ 'P همان صفحهٔ P است. یعنی: برسه نقطهٔ C, B, A فقط یك صفحه می گذرد.

(۴-۴-۳)-قضیه- اگر دو صفحه متمایز P و 'P یك نقطهٔ مشترك A داشته باشند، آن دو صفحه فقط در یك خط راست که بر A می‌گذرد، مشترکند.

برهان- نقطهٔ M $(M \in P)$ را به نقطهٔ A وصل کرده و خط حاصل را امتداد می‌دهیم و بر امتداد آن نقطهٔ N را اختیار می کنیم ، شکل (۴-۷) ؛ از این فرض که $A \in P'$ و A بین دو نقطهٔ M و N است نتیجه می‌شود که دو نقطهٔ اخیر در دو طرف صفحهٔ 'P قرار دارند .



شکل (۴ - ۷)

حال اگر نقطهٔ دیگری مانند 'M روی P و در نیم فضای [P',M] اختیار کنیم ، چون نقطهٔ N در نیم فضای [P',M] نیست، دو نقطهٔ 'M و N در دو طرف صفحهٔ 'P واقع می‌شوند و

بنابراین پساره خط NM' با صفحهٔ P نقطهٔ مشترکی مانند B دارد و $B \in P$ زیرا

$$B \in M'N \subset P$$

یعنی، دو صفحهٔ P و P' درنقطهٔ دیگری مانند B نیز مشترکند وخط AB زیرمجموعهٔ هردو صفحهٔ P و P' است، یعنی دو صفحهٔ P و P' در خط AB مشترکند.

چون بر صفحهٔ P به تعداد بی‌شمار نقاط مانند M' می‌توان اختیار کرد، با همین استدلال ثابت می‌شود که دوصفحهٔ P و P' نقطه‌های مشترك بی‌شمار دارند. اما هر نقطهٔ دیگر مانند C که بر دو صفحهٔ P و P' واقع باشد ناچار بر خط AB واقع است ، زیرا اگر نقاط C, B, A بر یك خط راست نباشند لزوماً باید قبول کنیم که بر سه نقطهٔ غیر واقع بر یك خط راست دو صفحهٔ متمایز P و P' گذشته‌اند، و این ممکن نیست. پس نقاط مشترك دو صفحه تمام برخط AB واقعند. **یعنی $P \cap P'$ یك خط راست است.**

دو صفحهٔ متمایز را که در یك خط راست مشترك باشند دو صفحهٔ متقاطع وخط مزبور را فصل مشترك آن دو صفحه می گوییم.

تمرین

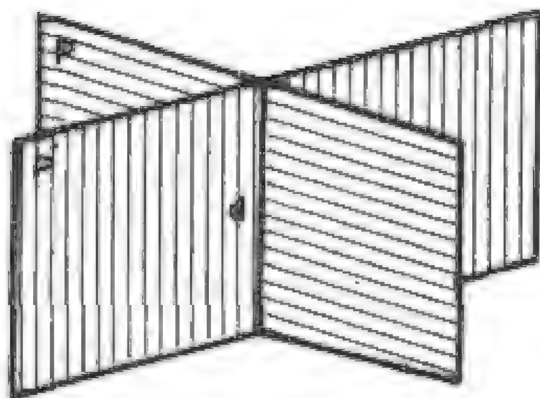
۱ـ دو صفحهٔ P و P' در نقطهٔ A مشترکند، دروضع نسبی آنها بحث کنید.

۲ـ دوصفحهٔ P و P' و خط d مفروضند، از رابطه‌های $d \subset P$ و $d \subset P'$ چه‌نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ وضع نسبی P و P' را در این حالت بررسی کنید.

۳ـ دو صفحهٔ متمایز P و P' مفروضند، نقاط C, B, A را چنان در نظر می گیریم که $A, B, C \in P$ و $A, B, C \in P'$ است. وضع نقاط مزبور را تعیین کنید.

(۴-۴-۴) ـ وضع نسبی دو صفحه ـ دو صفحهٔ P و P' را به عنوان مجموعهٔ نقاط در نظر می گیریم ، وضع دو صفحه از سه حال خارج نیست :

۱ـ دو صفحه متمایزند ولی اشتراك آنها تهی نیست. دراین صورت دوصفحه فقط در یك خط راست مشترکند که فصل‌مشترك آن دو صفحه نامیده می‌شود. چنین‌صفحه‌هایی را متقاطع گوئیم، مانند صفحه‌های P و P' در شکل (۴ـ۸) که در خط d متقاطعند :

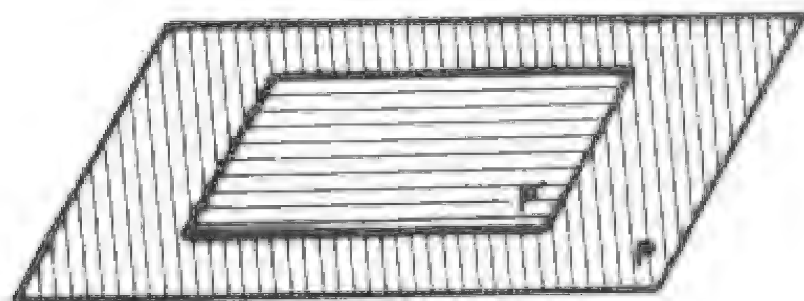


شکل (۴ـ۸)

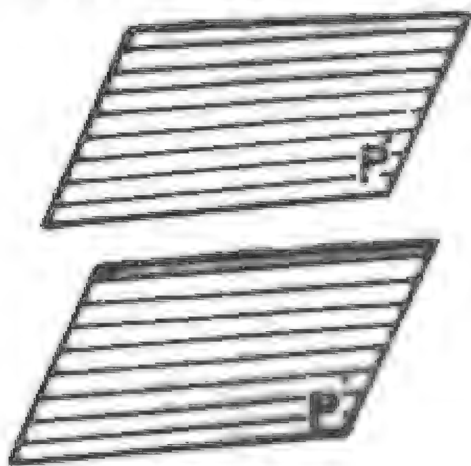
$$P \cap P' = d$$

۲ـ دو صفحه بر هم منطبقند (شکل ۴-۹) : $P \cap P' = P = P'$

۳ـ اشتراك دو صفحه مجموعه‌ای تهی است مانند شکل (۴-۱۰) : $P \cap P' = \phi$



شکل (۴-۹)



شکل (۴ — ۱۰)

تعریف ـ دو صفحه موازی نامیده می‌شوند هرگاه یا نقطه مشترکی نداشته باشند یا بر هم منطبق باشند (حالتهای ۲ و ۳).

(۴-۵) ـ توازی خط و صفحه

چنان‌که ذکر شد، یك خطرا وقتی موازی صفحه‌می گوییم که بر آن صفحه واقع باشد یاآن‌که با صفحه نقطهٔ مشترك نداشته باشد.

در حالتی که خط با صفحه فقط یك نقطهٔ مشترك داشته باشد، گوییم خط و صفحه یکدیگر را قطع کرده‌اند.

شرط توازی خط و صفحه

(۴-۵-۱)ـ قضیه ـ هر خط‌که با یکی از خطهای صفحه‌ای موازی‌باشد باآن صفحه موازی‌است.
یعنی اگر d مجموعهٔ نقاط یك خط و P مجموعهٔ نقاط یك صفحه باشد:

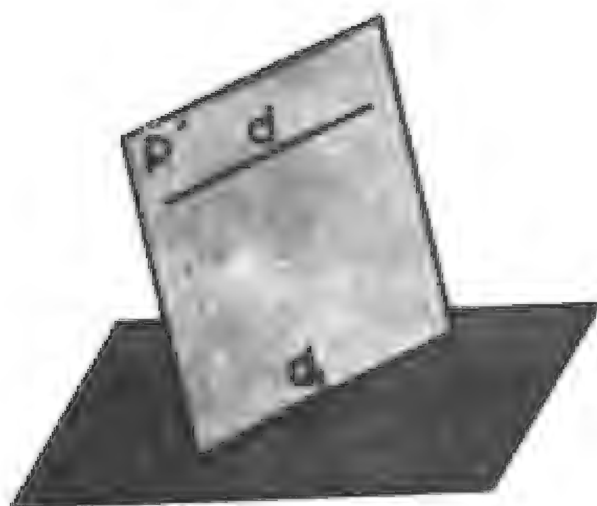
$$(d \parallel d_1 \;\text{و}\; d_1 \subset P) \Longrightarrow d \parallel P$$

برهان ـ دو خط موازی d و d_1 صفحه‌ای چون P' مشخص می کنند. (چرا؟) ، شکل (۴-۱۱) ، اگر خط d صفحهٔ P را در نقطه‌ای مانند M قطع کند:

$$[d \cap P = \{M\},\; d \subset P'] \Longrightarrow M \in P'$$

اما

$$(M \in P,\; M \in P') \Longrightarrow M \in (P \cap P') \Longrightarrow M \in d_1$$



شکل (۴-۱۱)

بنابراین :

$$(M \in d \;,\; M \in d_1) \Longrightarrow M \in (d \cap d_1) \Longrightarrow d \nparallel d_1$$

و این مخالف فرض است ، پس $d \parallel P$.

اگر خط d برصفحهٔ P واقع باشد، در این صورت بنا بر تعریف، d با صفحه موازی‌است و قضیه ثابت است.

(۲-۵-۴) ـ صورتهای مختلف نمایش صفحه ـ از آنچه گذشت می‌توان نتیجه گرفت که:

۱) هرسه‌نقطهٔ غیرواقع بریك خط راست یك صفحه مشخص می‌کنند ، بنابراین هر صفحه را با سه نقطه از آن‌که بریك خط راست واقع نباشند می‌توان نمایش داد .

۲) اگر یك خط و نقطه‌ای خارج آن خط مفروض باشند ، سه نقطهٔ غیرواقع بریك خط راست می‌توان درنظر گرفت‌که دونقطهٔ آنها برخط و نقطهٔ سوم همان نقطه‌ای باشدکه خارج خط فرض شده است . براین سه نقطه یك صفحه و فقط یك صفحه می‌گذرد . بنابراین

هرصفحه را با یك خط آن ونقطه‌ای ازآن‌که خارج خط باشد می‌توان نمایش داد.

۳) هرگاه دوخط d و d' موازی باشند، دریك‌صفحه واقعند پس یك صفحه را مشخص می‌کنند ، بنابراین

هرصفحه را با دوخط متوازی از آن می‌توان نمایش داد.

۴) اگر دو خط d و d' در O متقاطع باشند. نقطه O و دونقطه دیگر یکی بر d ودیگری بر d' سه نقطه غیر واقع بر یك امتدادندکه یك‌صفحه را مشخص می‌کنند. پس هرصفحه را با دو خط متقاطع از آن می‌توان نمایش داد.

تمرین

۱ ـ عبارتهای زیر را چنان کامل کنیدکه هریك گزاره‌ای درست باشد .

ـ یك خط را موازی یك صفحه می‌گوییم درصورتی‌که .....

ـ شرط لازم و کافی برای آن‌که خطی با صفحه‌ای موازی باشد آن است‌که ...

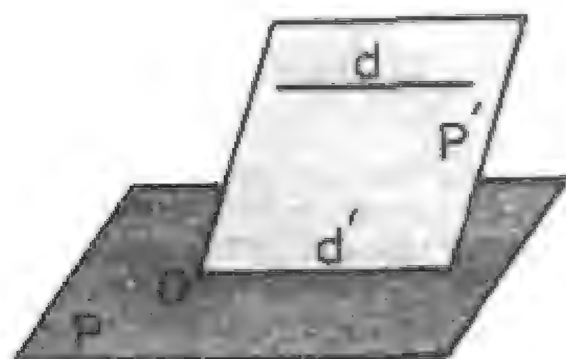
۲ ـ بریك‌نقطهٔ O واقع درخارج‌یك‌صفحهٔ P چند خط موازی‌آن صفحه می‌گذرد؟ چرا ؟

۳ ـ بریك نقطهٔ واقع درخارج یك خط d چند صفحه موازی آن خط می‌گذرد ؟ چرا ؟

۴ ـ دوخط متنافر d و d' مفروضند ؛ صفحه‌ای مشخص کنیدکه خط d' را شامل باشد و با خط d موازی باشد . همچنین صفحه‌ای مشخص کنید که برخط d بگذرد و با خط d' موازی باشد .

(۴-۵-۳)-قضیه - هرگاه خطی با صفحه‌ای موازی باشد ، هر صفحه که بر آن خط بگذرد و با صفحه مفروض موازی نباشد آن صفحه را در خطی قطع می‌کند که با خط مفروض موازی است .

یعنی اگر خط d با صفحهٔ P موازی باشد و صفحهٔ 'P بر d بگذرد و صفحهٔ P را در خط 'd قطع کند، آن گاه $d \parallel d'$ شکل (۴-۱۲).

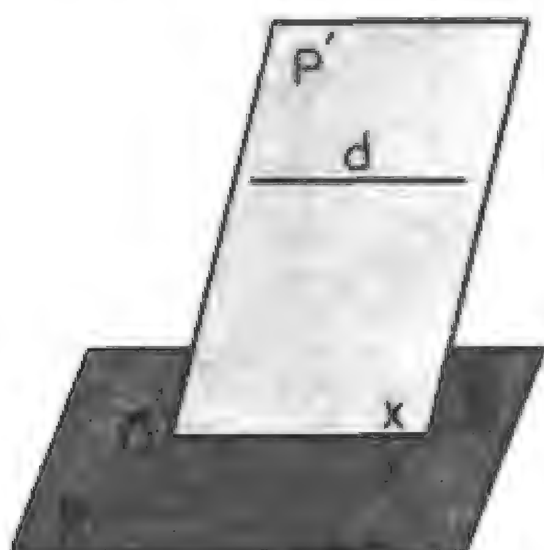


شکل (۴-۱۲)

برهان - دو خط d و 'd متنافر نیستند زیرا در یک صفحه واقعند، پس باهم یا موازیند و یا متقاطع ،هرگاه موازی باشند قضیه ثابت است و اگر متقاطع باشند نقطهٔ تقاطع آنها روی خط 'd و در نتیجه روی صفحه P قرار میگیرد یعنی خط d صفحهٔ P را قطع می کند و این خلاف فرض است ، پس $d \parallel d'$.

(۴-۵-۴)-قضیه - اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد، هر خط که از یک نقطه صفحه ، موازی آن خط رسم شود ، بر آن صفحه قرار خواهد داشت .

برهان - فرض می کنیم خط d با صفحه P موازی و نقطه O در P است. اگر d در صفحه باشد و نقطه O نیز بر d قرار داشته باشد درآنصورت خطی که از O موازی d رسم می‌شود بر d منطبق است و درنتیجه در P قرار دارد . پس فرض می کنیم O روی d نیست ولی خط d در صفحه یا خارج صفحه است . از نقطه O خط Oy را موازی d رسم می کنیم و صفحه‌ای که بر d و Oy می گذرد 'P می‌نامیم. اگر 'P بر P منطبق شود (و این درصورتی است که d در P باشد) آنگاه خط Oy هم در P قرار می گیرد و قضیه ثابت است. اگر 'P با P متمایز باشد، آنگاه فصل مشترك P و 'P خطی مانند Ox است که موازی d می باشد (قضیه قبل) . اما اصل توازی اقلیدس می گوید که از یک نقطه O واقع در صفحه 'P تنها یک خط می‌توان در آن صفحه موازی d رسم کرد. پس $Oy = Ox$ یعنی Oy در صفحه P قرار دارد. (شکل ۴-۱۳).



شکل (۴-۱۳)

(۴-۵-۵)-قضیه - اگر صفحه‌ای یکی ازدو خط موازی را قطع کند ، دیگری را نیز قطع می‌کند .

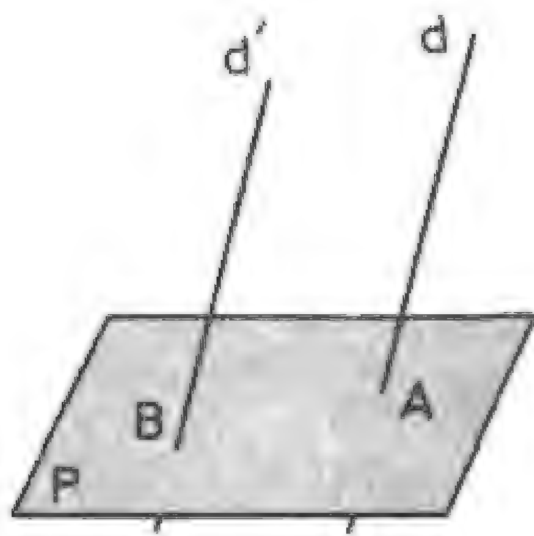
یعنی اگر d و 'd مجموعه‌های نقاط دوخط و P مجموعهٔ نقاط یك صفحه باشد :

$$(d \parallel d', d \nparallel P) \Longrightarrow d' \nparallel P$$

برهان ـ اگر خط d صفحهٔ P را در نقطهٔ A قطع کرده باشد، شکل (۴ـ۱۴) بموجب قضیهٔ قبل:

$$(d' \parallel d, d' \parallel P, A \in d \cap P) \Longrightarrow d \subset P$$

و این مخالف فرض است ، یعنی می‌دانیم که چنین نیست. یعنی خط 'd با صفحهٔ P موازی نیست .



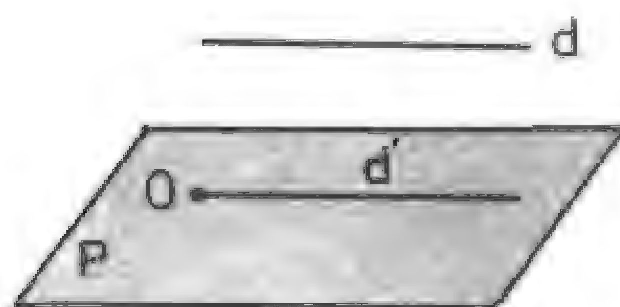
شکل (۴ـ۱۴)

نتیجه ـ هرگاه خطی با صفحه‌ای موازی باشد، هر خط موازی با آن خط نیز با آن صفحه موازی است .

یعنی اگر d و 'd مجموعه‌های نقاط دوخط و P مجموعهٔ نقاط یك صفحه باشد ،

$$(d \parallel P \text{ و } d' \parallel d) \Longrightarrow d' \parallel P$$

برهان ـ اگر خط 'd باصفحهٔ P نقطهٔ مشترکی مانند O داشته باشد (شکل ۴ـ۱۵) بر صفحه منطبق است، پس $d' \parallel P$. اگر 'd با P نقطه مشترکی نداشته باشد، بدیهی است که $d' \parallel P$.



شکل (۴ـ۱۵)

تمرین

۱ ـ هریك از گزاره‌های زیر را چنان کامل کنید که یك گزارهٔ درست باشد .

ـ هرخط که صفحه‌ای را قطع نکند باآن صفحه .... است.

ـ اگر دوخط موازی باشند هرصفحهٔ موازی با یکی از آنها با دیگری ....

ـ هردوخط متقاطع یك صفحه وفقط .... مشخص می‌کنند .

ـ دوخط متوازی زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ نقاط یك ...اند .

ـ هرخط ویك نقطهٔ واقع درخارج آن .... صفحه مشخص می‌کنند .

ـ برهرنقطهٔ خارج یك صفحه .... خط موازی آن صفحه می‌گذرد ، چرا ؟

۲ ـ صفحهٔ P و خط D و نقطهٔ O واقع درخارج آن خط مفروضند ، خطی مشخص کنید که از نقطهٔ O بگذرد وخط D را قطع کند و با صفحهٔ P موازی باشد .

۳ ـ دو خط d و 'd و نقطهٔ O مفروضند ، خطی مشخص کنید که از نقطهٔ O بگذرد و با دوخط مزبور متقاطع باشد .

(۴-۵-۶) - قضیه - دوخط راست موازی با خط سوم، خود موازی یکدیگرند.

یعنی اگر d و 'd و "d سه خط راست باشند ،

$$(d' \parallel d \ , \ d \parallel d'') \Longrightarrow d' \parallel d''$$

برهان - اگر سه خط d و 'd و "d در یك صفحه باشند حکم محقق است (چرا ؟).

بنابراین فقط حالتی را درنظر می گیریم که سه خط مفروض در یك صفحه نباشند (حالت فضایی قضیه) . دراین حالت برای اثبات قضیه گوییم : اولا دو خط 'd و "d نمی توانند متقاطع باشند، شکل (۴-۱۶) ، زیرا در آن صورت از نقطهٔ تقاطع آنها دوخط متمایز موازی d رسم شده است ، و این مخالف اصل اقلیدس است . پس:

$$d' \cap d'' = \phi$$

شکل (۴-۱۶)

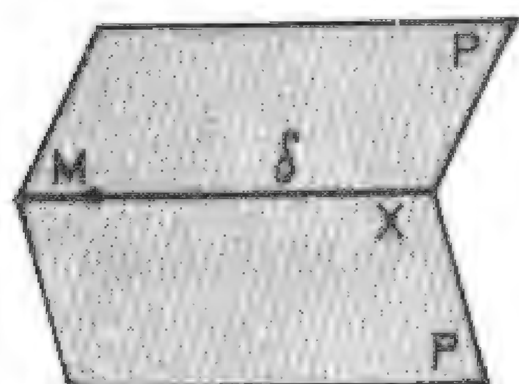
ثانیاً دوخط 'd و "d متنافر نیستند،

زیرا اگر این دوخط متنافر باشند، صفحهٔ P که برخط 'd و نقطهٔ دلخواه M روی "d می گذرد خط "d را تنها در نقطهٔ M قطع خواهد کرد، وچون خط "d صفحهٔ P را در نقطهٔ M قطع می کند، خط d که موازی "d است نیز صفحهٔ P را قطع می کند، و اگر خط d صفحهٔ P را قطع کند ، خط 'd هم که موازی d است صفحهٔ P را قطع می کند وحال آن که $d' \subset P$ و 'd نمی تواند باصفحهٔ P متقاطع باشد . پس "d و 'd متنافر نیستند . بنابراین دوخط 'd و "d کـه متقاطع نبوده و متنافرهم نیستند ، متوازیند .

(۴ - ۵ - ۷) - قضیه - اگر خطی با دو صفحه متقاطع موازی باشد ، با فصل مشترك آن دو صفحه موازی است .

یعنی اگر P و 'P دوصفحه و d یك خط راست باشد :

$$(P \cap P' = \delta \text{ و } d \parallel P \text{ و } d \parallel P') \Longrightarrow d \parallel \delta$$



برهان — برنقطهٔ دلخواه M روی δ یك خط وفقط یك خط موازی d ، مانند Mx می گذرد شکل (۴-۱۷) ، خط Mx برصفحهٔ P و همچنین برصفحهٔ 'P واقع است (قضیهٔ ۴ - ۵ - ۴) . و در این صورت خواهیم داشت :

شکل (۴ — ۱۷)

$$(Mx \subset P \text{ و } Mx \subset P') \Longrightarrow$$

$$P \cap P' = Mx \Longrightarrow Mx = \delta$$

بنابراین $d \parallel \delta$

(۴-۶) ـ توازی دوصفحه

می‌دانید که دوصفحهٔ متمایز وقتی موازی هستند که هیچ نقطهٔ مشترک نداشته باشند .

اگر دوصفحه موازی باشند ، هرخط واقع بریکی با صفحهٔ دیگر موازی است . یعنی اگر P و P' دوصفحه باشند وخط d درصفحهٔ P باشد :

$$(P \parallel P' \text{ و } d \subset P) \Longrightarrow d \parallel P'$$

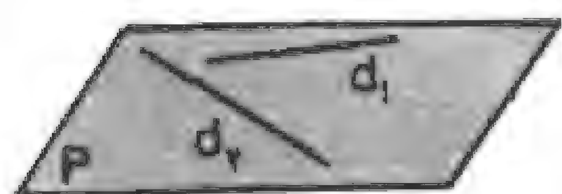
زیرا اگر خط d صفحهٔ P' را در نقطه‌ای مانند M قطع کند ، لزوماً باید نقطهٔ M برصفحهٔ P واقع باشد (چرا ؟) ، یعنی دوصفحهٔ P و P' نقطهٔ مشترك داشته باشند و این مخالف فرض است ، پس $d \parallel P'$.

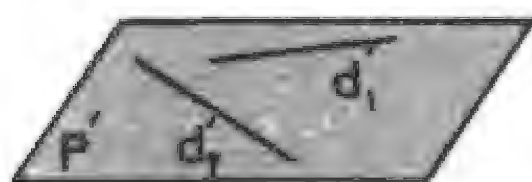
به همین دلیل هرخط واقع برصفحهٔ P' با صفحهٔ P موازی است .

شرط توازی دوصفحه

(۴-۶-۱) ـ قضیه ـ هرگاه دو خط غیرموازی از صفحه‌ای با دو خط از صفحه‌دیگرموازی باشند آن دو صفحه متوازیند .

یعنی اگر دوخط ناموازی d_1 و d_2 از صفحهٔ P به ترتیب با دوخط d'_1 و d'_2 از صفحهٔ P' موازی باشند ، دوصفحهٔ P و P' متوازیند، شکل (۴-۱۸).



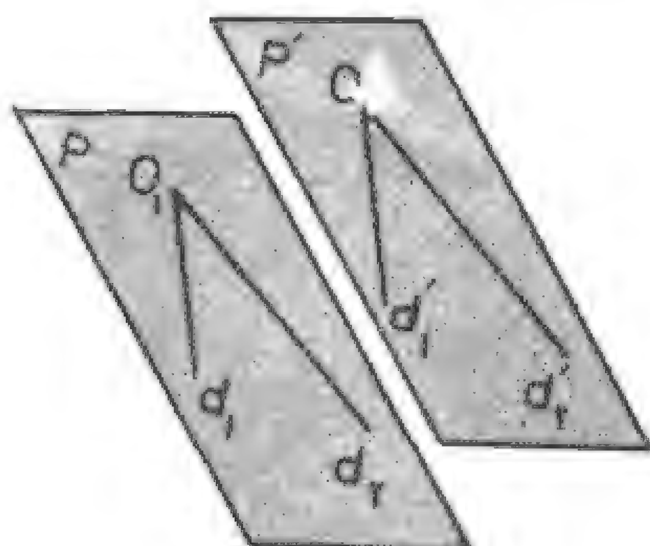


شکل (۴-۱۸)

برهان ـ اگردوصفحهٔ P و P' متوازی نباشند پس فصل مشترکی مانند δ دارند . (δ در شکل مشخص نمی‌شود .) خط δ که در صفحهٔ P واقع است دست‌کم یکی از دو خط d_1 و d_2 ، مثلا d_1 رادرنقطه‌ای‌چون M قطع می کند،(چرا؟).این نقطه برصفحهٔ P' واقع است، یعنی دراین صورت باید خط d_1 با صفحهٔ P' متقاطع باشد و این مخالف فرض‌است، زیرا $d_1 \parallel P'$ است(قضیه ۴-۵-۱) . بنابراین خط δ نمی‌تواند وجود داشته باشد . یعنی $P \cap P' = \phi$ و به بیان دیگر :

$$P \parallel P'$$

(۴-۶-۲) ـ قضیه ـ بر هر نقطهٔ واقع در خارج صفحه‌ای یك صفحه و فقط یك صفحه موازی آن صفحه میگذرد.



شکل (۴-۱۹)

برهان ـ صفحهٔ P و نقطهٔ O در خارج آن مفروضند ، شکل (۴ - ۱۹) . بر نقطهٔ دلخواه $O_1 \in P$ دوخط متقاطع d_1 و d_2 را در صفحهٔ P مرور می‌دهیم و از نقطهٔ O دوخط d'_1 و d'_2 را به ترتیب موازی آنها رسم می کنیم . دوخط اخیر صفحه‌ای مانند P' مشخص می کنند که برنقطهٔ O می گذرد و با صفحهٔ P موازی است (قضیه قبل) .

حال ثابت می‌کنیم که این صفحه منحصربه یکی است . زیرا اگر صفحهٔ دیگر P'_1 برنقطهٔ O بگذرد و با صفحهٔ P موازی باشد با هریك ازدوخط d_1 و d_2 موازی است و بنابراین خطی راکه از نقطهٔ O واقع برآن ، موازی d_1 یا d_2 رسم شود شامل خواهدبود (قضیه ۴-۵-۲) .
بنابراین: $d'_1 \subset P'_1$ و $d'_2 \subset P'_1$ ، امابردوخط d'_1 و d'_2 تنهایك صفحه می گذرد، از این روی لزوماً باید $P'_1 = P'$ باشد ، یعنی P'_1 نیز همان صفحهٔ P' است .

تمرین

۱ ـ صفحهٔ P' بـا دوخط متقاطع Ox و Oy از یك صفحهٔ P موازی است ، ثابت کنید $P \parallel P'$.

۲ ـ دوخط d و d' با خط δ ازیك صفحهٔ P موازیند ، ثابت کنید بردوخط مزبوریك صفحه مرور می کند . دروضعی که این صفحه نسبت به صفحهٔ P می‌تواند داشته باشد، بحث کنید .

۳ ـ برخط d واقع درخارج صفحهٔ P صفحه‌ای مرور دهیدکه با صفحهٔ P موازی باشد. شرط امکان مسئله چیست ؟

۴ ـ ثابت‌کنید اگردوصفحه موازی باشند ، هرخط که یکی از آنها را قطع کند دیگری را نیز قطع می کند .

۵ ـ ثابت کنید اگر دوصفحه متوازی باشند هرخط موازی با یکی از آنها با دیگری نیز موازی است .

۶ ـ ثابت کنید اگردوخطمتوازی باشند هرصفحه‌موازی یکی با دیگری نیز موازی است.

(۴-۶-۳)- قضیه - اگر دو صفحه با صفحهٔ سومی موازی باشند، خود موازی یکدیگرند .

یعنی اگر P و 'P و "P سه صفحه باشند :

$$(P' \parallel P \text{ و } P \parallel P'') \Longrightarrow P' \parallel P''$$

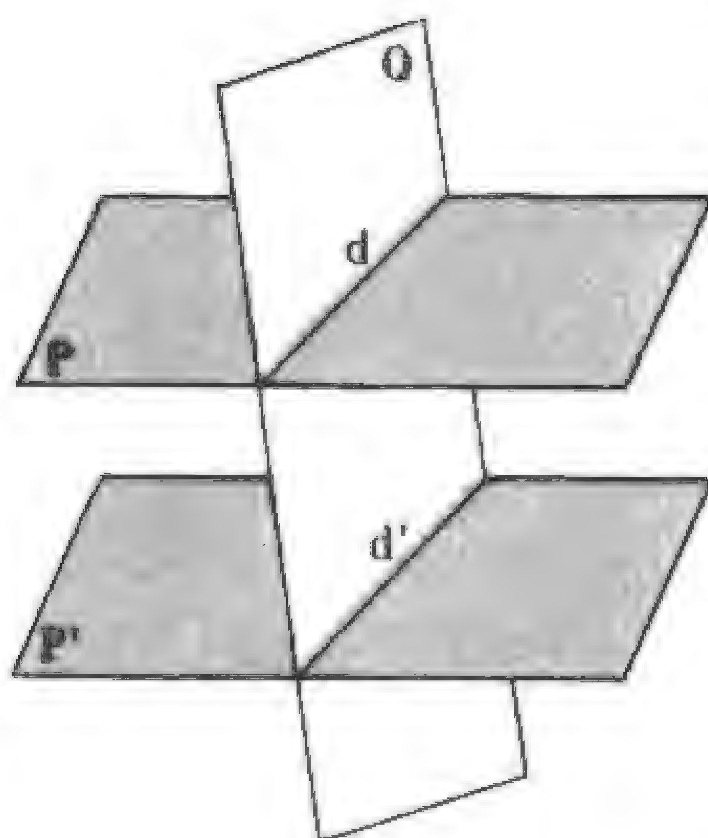
برهان - اگر دو صفحهٔ 'P و "P متقاطع باشند ، لزوماً از هر نقطهٔ واقع بر فصل مشترك آنها دو صفحه موازی P رسم شده است ، و می‌دانیم که این ممکن نیست . بنابراین صفحه‌های 'P و "P موازیند .

(۴-۶-۴) - قضیه - اگر دو صفحه متمایز متوازی باشند، هر صفحه که یکی از آنها را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند و فصل مشترکهای آن با دو صفحهٔ مزبور دو خط متوازیند.

یعنی اگر P و 'P و Q سه صفحه متمایز باشند (شکل ۴-۲۰) .

$$(P \parallel P' \text{ و } P \cap Q = d) \Longrightarrow$$

$$(P' \cap Q = d' \text{ و } d' \parallel d)$$



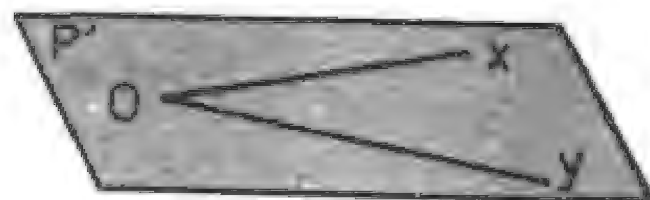
شکل (۴-۲۰)

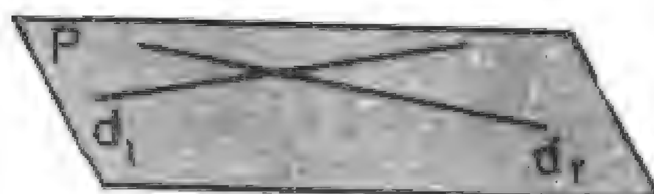
برهان- صفحات 'P و Q نمی‌توانند متوازی باشند، زیرا توازی آنها به این معنی است که بر هر نقطه از خط d دو صفحهٔ موازی با صفحهٔ 'P گذشته است . (صفحه های P و Q) و این ممکن نیست .

دو خط d و 'd متنافر نیستند (چرا ؟) پس یا هم یا موازیند و یا متقاطع ، درصورت موازی بودن حکم ثابت است و اگر متقاطع باشند فصل مشترك آنها روی دو صفحهٔ P و 'P هم قرار میگیرد درنتیجه این دو صفحه متقاطع میشوند و این ممکن نیست پس $d' \parallel d$.

(۴-۶-۵) - قضیه - همهٔ خطهای همرسی که با یك صفحه موازی هستند بر صفحه‌ای موازی با آن صفحه قرار دارند .

برهان - صفحهٔ P و نقطهٔ O را در خارج آن فرض می کنیم ، اگر از نقطهٔ O دو نیم خط Ox و Oy را موازی دو خط ناموازی d_1 و d_2 از صفحهٔ P درنظر بگیریم، شکل (۴-۲۱)، آن دو نیم خط صفحه‌ای مانند 'P مشخص می کنند که بر نقطهٔ O می گذرد و با صفحهٔ P موازی است (قضیهٔ ۴ - ۶ - ۱) .





شکل (۴-۲۱)

حال ملاحظه می‌کنیم کـه هر خط که از نقطهٔ O موازی صفحهٔ P رسم شود بایکی از خطهای صفحهٔ P موازی است و بنابراین برصفحهٔ 'P منطبق خواهد بود (قضیهٔ ۴-۵-۳) .

تمرین

۱ - هریك از عبارات زیر را چنان کامل کنیدکه یك گزارهٔ درست حاصل شود .

- اگر دوصفحه موازی باشند هرخط واقع بریکی با دیگری ....
- اگر دوصفحه موازی باشند فصل مشترکهای آنها با هرصفحهٔ دلخواه دوخط ....
- مجموعهٔ خطهایی که از یك نقطهٔ خارج صفحه‌ای موازی آن صفحه رسم می‌شوند... پدید می‌آوردکه ...

۲- اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد، همه خطهایی که آن خط را قطع می‌کنندوباصفحهٔ مفروض موازی هستند برصفحه‌ای موازی صفحهٔ مفروض قرار دارند .

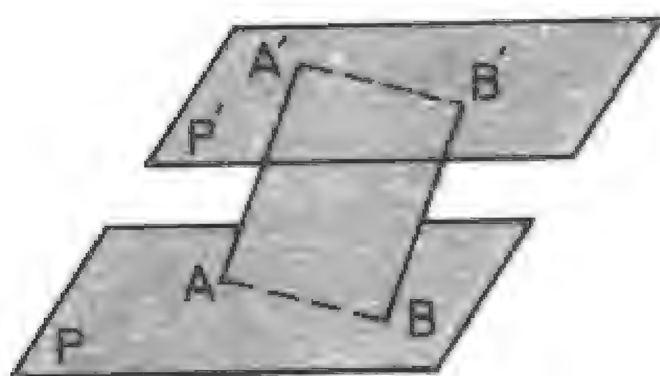
۳ - چهارنقطهٔ A و B و C و D بریك صفحه واقع نیستند ، اولا چند صفحه می‌توان درنظر گرفت به صورتی که هرصفحه شامل سه نقطه از نقطه‌های مفروض باشد. ثانیاً چند جفت صفحه‌های موازی می‌توان درنظر گرفت چنان‌که از هرجفت صفحه‌های موازی یك صفحه برسه نقطه‌از نقطه‌های مزبور و دیگری برنقطهٔ چهارم مرورکند .

(۴-۷) - صورت فضایی قضیهٔ تالس

(۴-۷-۱)- قضیه - پاره خطهای متوازی محصور بین دوصفحهٔ متوازی ، متساویند .

یعنی اگر P و 'P دوصفحه باشند ، شکل (۴-۲۲):

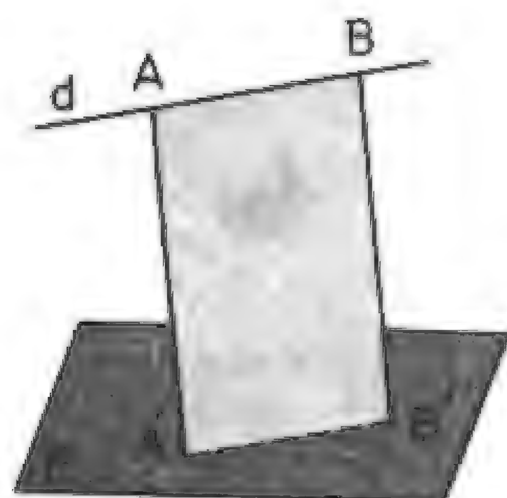
$$(A,B\in P \text{ و } A',B'\in P' \text{ و } AA' \parallel BB' \text{ و } P \parallel P') \Longrightarrow AA' = BB'$$



شکل (۴ — ۲۲)

برهان ـ دوخط موازی AA' و BB' صفحه‌ای مشخص می‌کنند که با صفحهٔ P درخط AB و با صفحهٔ P' در خط $A'B'$ مشترك است و $AB \parallel A'B'$ (چرا ؟) ، بنابراین چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی‌ـ الاضلاع است و $AA' = BB'$.

(۴ـ۷ـ۲) ـ قضیه ـ پاره خطهای متوازی که بین یك صفحه ویك خط موازی با آن محصور باشند ، متساویند .



شکل (۴ـ۲۳)

برهان ـ اگر صفحهٔ P وخط d موازی باشند، شکل (۴ـ۲۳)، و دوپاره خط AA' و BB' راکه دوسرهریك از آنها به ترتیب یکی برخط d و دیگری برصفحهٔ P واقع است و با یکدیگر موازیند در نظر بگیریم ، این دوخط موازی، صفحه‌ای مشخص می‌کنند که باصفحهٔ P درخط $A'B'$ مشترك است. خط $A'B'$ با خط d موازی است (چرا ؟) ، بنابراین چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است و $AA' = BB'$.

(۴ـ۷ـ۳) ـ قضیهٔ تالس ـ صفحه‌های متوازی برخطهایی که آنهارا قطع می‌کنند پاره خطهایی پدید می‌آورندکه نظیر به‌نظیر متناسبند.

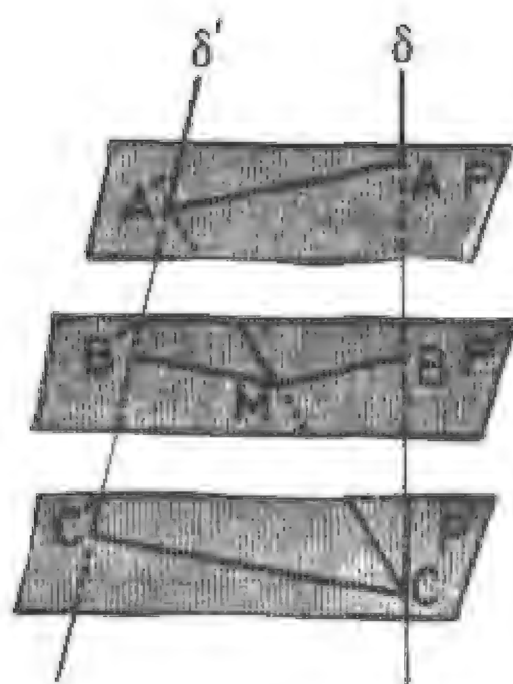
یعنی اگر سه صفحهٔ متوازی P و P' و P'' ، شکل (۴ـ۲۴)، خط δ را درنقاط A و B و C و خط δ' را در نقاط A' و B' و C' قطع کرده باشند داریم: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$

برهان ــ اگرنقطهٔ A' روی P را به‌نقطهٔ C روی P'' وصل کنیم، پاره‌خط حاصل صفحهٔ P' را درنقطه‌ای مانند M قطع می‌کند (چرا ؟).

صفحهٔ مثلث ACA' با صفحهٔ P' درخط BM مشترك است و $AA' \parallel BM$ (قضیهٔ ۴ـ۶ـ۴) بنابراین :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'M}{MC} \qquad (1)$$

به همین دلیل $B'M \parallel CC'$ و در نتیجه :



شکل (۴ — ۲۴)

$$\frac{A'M}{MC} = \frac{A'B'}{B'C'} \qquad (۲)$$

ازمقایسهٔ تساویهای (۱) و (۲) می‌توان داشت:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad \text{یا} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

تمرین

۱ـ صفحهٔ P و نقطهٔ O خارج صفحه مفروضند. نقطه‌ای مانند M برصفحهٔ P درنظر گرفته و وسط پاره خط OM را N می‌نامیم ، مکان هندسی نقطهٔ N را وقتی نقطهٔ M برصفحهٔ P جا به جا می‌شود تعیین کنید .

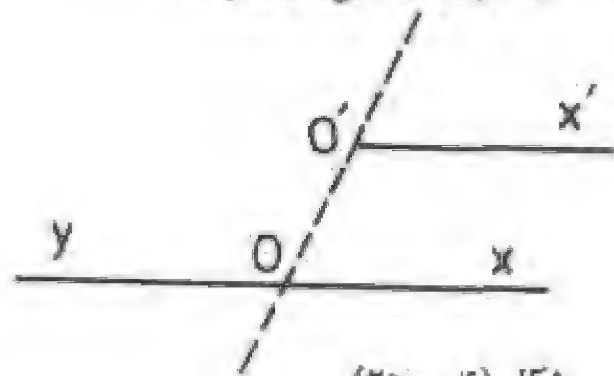
۲ ـ سه صفحه بردوخط که آنهارا قطع کرده‌اند پاره خطهای متناسب پدید آورده‌اند، آیا صفحه‌ها لزوماً موازی‌یکدیگرند ؟ (نتیجه میشود که عکس قضیه تالس در فضا درست نیست) .

۳ ـ دوصفحهٔ P و 'P متوازیند . مکان هندسی وسطهای پاره خطهایی راکه دوسرآنها براین دوصفحه واقعند تعیین کنید .

(۴-۸)- زاویهٔ دوخط

(۴-۸-۱) - نیم خطهای موازی و هم‌جهت - دونیم خط موازی Ox و 'O'x را در صورتی هم‌جهت می گوییم که درصفحهٔ آنهـا هردونقطهٔ x و 'x دریک طرف خط 'OO واقع باشند ، شکل (۴-۲۵).

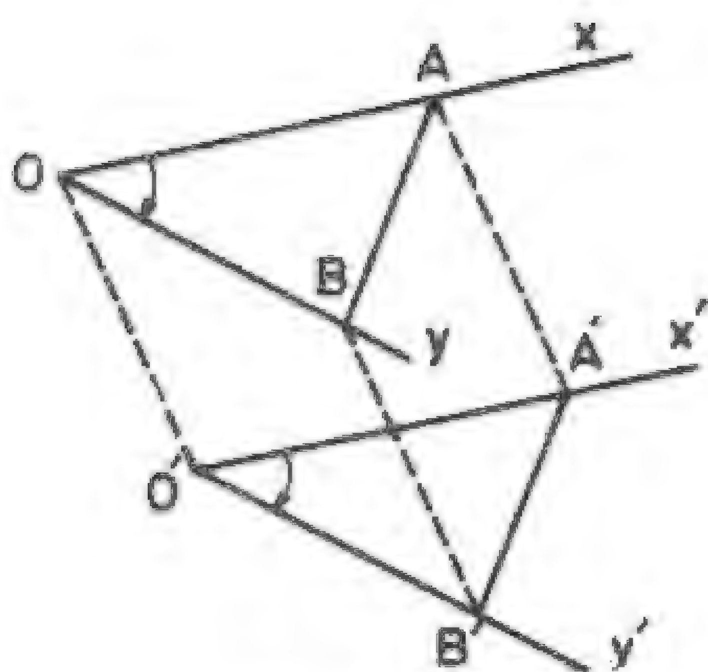
اگر دونیم خط 'O'x و Oy که موازی یکدیگرند چنان رسم شده باشندکه نقاط 'x و y درطرفین خط 'OO باشند . آن‌گاه نیم خطهای مرسوم را غیرهم‌جهت می گوییم .



شکل (۴ — ۲۵)

(۴-۸-۲)- قضیه - هرگاه اضلاع دو زاویه نظیر به نظیر موازی وهم‌جهت (یا غیرهم‌جهت) باشند . آن دو زاویه مساوی یکدیگرند .

برهان - بردوضلع موازی و هم‌جهت Ox و 'O'x ازدوزاویه پاره خطهای دلخواه ومساوی OA و 'O'A را جدا می کنیم، شکل(۴-۲۶)،



شکل (۴ - ۲۶)

اگر دونقطهٔ O و O'، همچنین نقاط A و A' را به هم وصل کنیم ، چون Ox و O'x' هم جهت هستند نقاط A و A' دریك طرف OO' واقع می‌شوند وچهارضلعی OAA'O' پدید می‌آید که‌دوضلع OA و O'A' آن متوازی ومتساویند، پس چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است و بنابراین‌پاره‌خط OO' با پاره خط AA' متوازی ومتساوی است .

اگر پاره خطهای OB و O'B' را به ترتیب بر نیم خطهای Oy و O'y' مساوی یکدیگر جداکنیم ، به همین دلیل پاره خط BB' با پاره خط OO' متوازی ومتساوی است، از اینجا نتیجه می‌شود که پاره خطهای AA' و BB' متوازی و متساویند و بنابراین چهارضلعی ABB'A' متوازی‌الاضلاع است و $AB = A'B'$.

از تساوی این دوپاره خط می‌توان نتیجه گرفت :

$\triangle AOB = \triangle A'O'B'$ و بنابراین $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$

اگر اضلاع دوزاویه‌نظیر به‌نظیرموازی وغیرهم‌جهت‌باشند، قضیه را چگونه‌ثابت‌می‌کنید؟

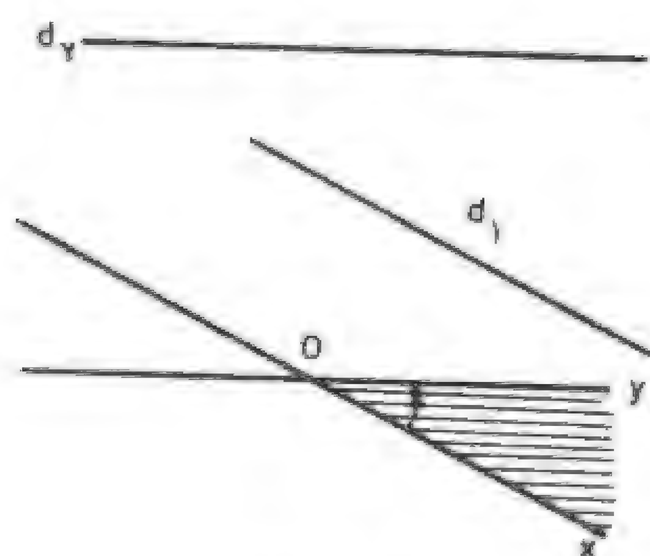
(۴-۸-۳۰) - قضیه - هرگاه اضلاع دو زاویه نظیر به نظیر موازی و یکی از آنها هم‌جهت و دوضلع دیگر غیرهم‌جهت باشند ، دو زاویه مکمل یکدیگرند .

اثبات به عهدهٔ دانش‌آموزان است .

(۴-۸-۴۰) - زاویهٔ دوخط متنافر - زاویهٔ دو خط متنافر، معمولاً زاویهٔ حاده یا قائمه‌بین دوخط است که از یك نقطهٔ موازی دو خط متنافر رسم شده باشند.

درحالت‌خاصی که دوخط d_1 و d_2 متوازی باشند، زاویهٔبین دو خط‌موازی صفر است وگوییم دو خط مزبور همراستا هستند .

اگر زاویهٔ بین دوخط متنافر قائمه باشد،



شکل (۴ - ۲۷)

می گوییم دوخط مزبور متنافراً بریکدیگرعمودند یا باهم زاویهٔ قائمه تشکیل می‌دهند یا راستا های عمود بر هم دارند.

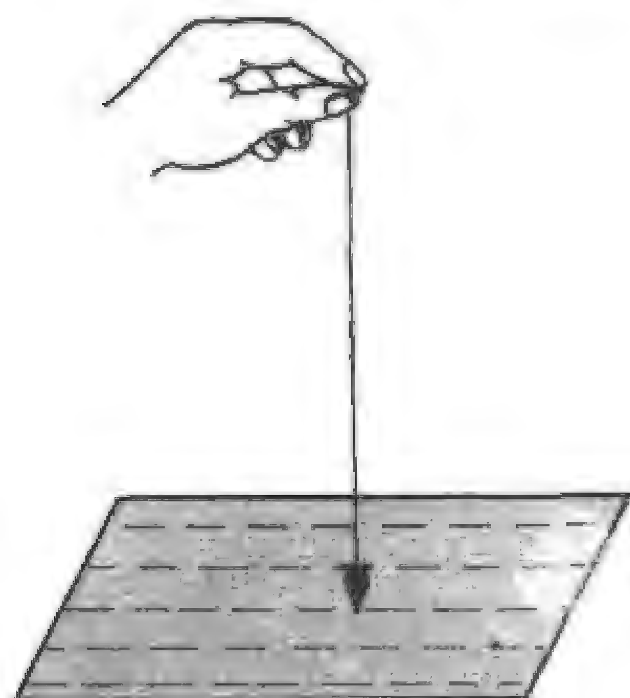
تمرین

۱ - اگر دوزاویهٔ حاده متساوی‌باشند ویك ضلع از یکی موازی یك ضلع از دیگری‌باشد: آیا اضلاع دیگرشان لزوماً موازیند ؟ چرا ؟

۲ - ثابت کنید اگر اضلاع دو زاویه نظیر به نظیر موازی باشند، نیمسازهای آنها با یکدیگر موازی یا برهم عمودند.

(۴-۹) - خط و صفحهٔ عمود برهم

(۴-۹-۱) - **تعریف** - خط d را درصورتی برصفحهٔ P عمود می گوییم که باهر خط از آن صفحه زاویهٔ قائمه ساخته باشد، به بیان دیگر برهرخط دلخواه از آن صفحه عمود باشد.



شکل (۴ — ۲۸)

از امتداد آزاد یك شاغول نسبت به صفحهٔ افقی می‌توان تصوریك خط عمود برصفحه را در ذهن ایجاد کرد. چنان‌که اگرشاغول‌را دربالای سطح‌آرام وساکن آب استخر به حال تعادل نگاه داریم ، امتداد ریسمان آن برسطح آب عمود است شکل (۴-۲۸).

امتداد شاغولی را درهرمحل امتداد **قائم** محل وصفحهٔ عمود برآن امتداد را **سطح تراز** یا **افقی**محل می گوییم .

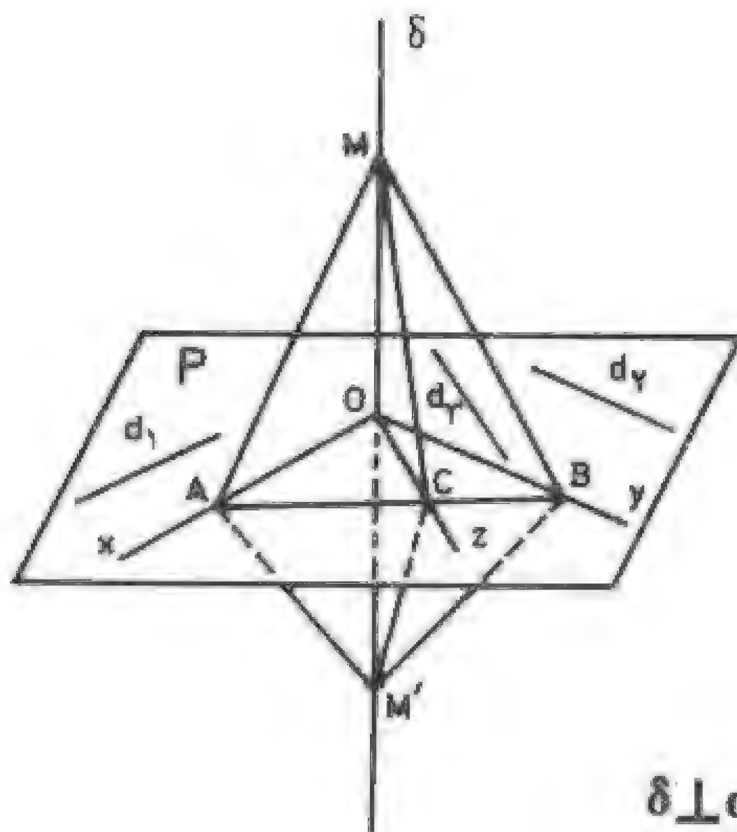
شرط آن‌که خطی برصفحه‌ای عمود باشد

(۴-۹-۲)-قضیهٔ - اگرخطی بردوخط ناموازی‌ازصفحه‌ای عمود باشد، برهرخط دیگر آن‌صفحه ، ودر نتیجه ، بنابر تعریف، برآن صفحه عمود است .

در شکل (۴-۲۹) فرض می‌کنیم خط δ بر دوخط ناموازی d_1 و d_2 از صفحهٔ P عمودباشد، خط دلخواهی مانند d_3 از آن صفحه در نظر گرفته و ثابت می کنیم‌خط δ برآن

خط نیزعمود است ، پس برهمهٔ خطهای صفحهٔ P عمود است و بنابراین برصفحهٔ P عمود است .

برهان ـ خط δ صفحهٔ P را در نقطه‌ای‌مانند O قطع می‌کند، ازاین نقطه نیم‌خطهای Ox و Oy و Oz را به‌ترتیب با d_1 و d_2 و d_3 موازی رسم می‌کنیم .



شکل (۴ـ۲۹)

$$\delta \perp d_2 \Longrightarrow \delta \perp Oy \quad \text{و} \quad \delta \perp d_1 \Longrightarrow \delta \perp Ox$$

حال‌خط دلخواهی‌ازصفحهٔ P درنظرمی گیریم که Ox را دریك نقطهٔ A و Oy را درنقطهٔ B و Oz را درنقطهٔ C قطع‌کرده باشدولی بر O نگذرد. بر خط δ در دوطرف نقطهٔ Oدونقطهٔ M و M' را چنان اختیارمی‌کنیم‌که $OM=OM'$ باشد، دراین صورت نیم خطهای Ox و Oy هریك در صفحه‌ای معین ، عمود منصف MM' است، بنابراین $AM=AM'$ و $BM=BM'$ و از این رابطه‌ها می‌توان نتیجه‌گرفت :

$$(AM=AM' \;،\; BM=BM' \;،\; AB=AB) \Longrightarrow (\triangle MAB = \triangle M'AB) \Longrightarrow (\widehat{MAB}=\widehat{M'AB})$$

در نتیجه $\triangle MAC=\triangle M'AC$ (ض ز ض)

و از آنجا $CM=CM'$ و چون نقطهٔ O وسط MM' است، ناچار نیم خط OCیك عمود-منصف از پاره خط MM' است و با ملاحظهٔ آن‌که $OC \parallel d_3$ است ، $MM' \perp d_3$ ، یعنی خط δ برهرخط مانند d_3 از صفحهٔ P عمود است ، بنابراین $\delta \perp P$.

تمرین

۱ ـ عبارتهای زیر را چنان‌کامل کنیدکه هر یك از احکام درست باشد .

ـ دوخط متنافر را وقتی بریکدیگر عمود می‌گوییم‌که ....

ـ امتداد قائم هرمحل بر.... آن محل عمود است .

ـ شاغولی که به‌صورت‌آویخته‌وآزاددرحال‌تعادل‌باشد، امتداد .... محل‌را مشخص‌می‌کند.

۲ ـ درهرنقطه از یك خط چند عمود برآن خط می‌توان درنظر گرفت؟ چرا ؟

۳ ـ از هرنقطهٔ واقع درخارج‌یك خط ، چند خط مرور می‌کند‌که با آن خط زاویهٔ قائمه بسازد ؟ چرا ؟

۴ ـ کدام‌یك از گزاره‌های زیر درست و کدام‌یك نادرست است؟ چرا؟

۱) $d_1 \subset P$ و $d_2 \subset P$ و $d \perp P \Rightarrow d \perp d_1$

۲) $d_1 \subset P$ و $d_2 \subset P$ و $d_1 \nparallel d_2$ و $d \perp d_1$ و $d \perp d_2 \Rightarrow d \perp P$

۵ ـ ثابت کنید اگر یکی از دوخط متوازی برصفحه‌ای عمود باشد ، دیگری نیز برآن صفحه عمود است .

گزاره‌هایی دربارهٔ خط عمود برصفحه

(۴-۹-۳)- قضیه- برهر نقطهٔ واقع بریك خط راست یادرخارج آن، یك صفحه و فقط یك صفحه عمود برآن خط مرور می‌کند .

برهان - ۱ ـ نقطهٔ O برخط d واقع است .

در این حالت برای اثبات قضیه دوصفحهٔ **متمایز** P و Q درنظرمی‌گیریم که‌هردوتای‌آنها خط d را شامل باشند، شکل (۴-۳۵)، درهریك از این دوصفحه نیم‌خطی درنظر می‌گیریم‌که در نقطهٔ O **برخط d عمودباشد (مانند Ox و Oy)**. این دونیم خط صفحه‌ای مانند R مشخص می‌کنند که در نقطهٔ O برخط d عمود است (قضیهٔ ۴-۹-۲) .

شکل (۴-۳۵)

حال ثابت می‌کنیم که صفحهٔ گذرنده از نقطهٔ O وعمود برخط d منحصر به همان صفحهٔ R است. برای اثبات این مطلب گوییم هرصفحهٔ دیگرمانند R' که در نقطهٔ O برخط d عمود باشد ، صفحه‌های P و Q را به ترتیب در دوخط مانند Ox' و Oy' قطع می‌کند وخط d **بر هر دوخط اخیر عمود است (چرا؟)، اما**

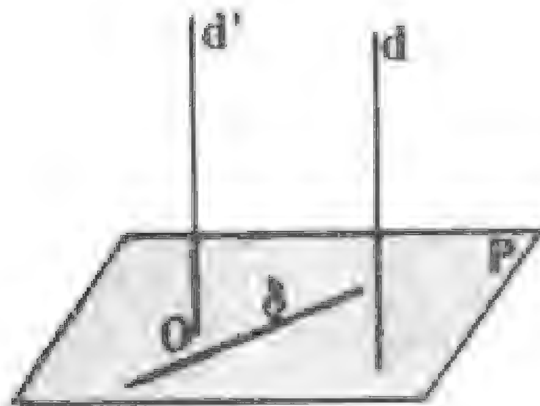
$$[Ox \perp d \text{ و } Ox' \perp d \text{ و } Ox \subset P \text{ و } Ox' \subset P] \Rightarrow Ox \equiv Ox'$$

$$[Oy \perp d \text{ و } Oy' \perp d \text{ و } Oy \subset Q \text{ و } Oy' \subset Q] \Rightarrow Oy \equiv Oy'$$

یعنی صفحهٔ R' دو نیم‌خط Ox و Oy را شامل است وچون دو نیم‌خط متقاطع فقط‌یك صفحه‌مشخص می‌کنند، صفحهٔ R' برصفحهٔ R منطبق است . یعنی R' همان R است وبنابراین برنقطهٔ O فقط یك صفحه عمود برخط d مرور می‌کند .

۲ ـ نقطهٔ O خارج خط d است .

در این حالت برای اثبات قضیه از نقطهٔ O خط d' را موازی خط d رسم می‌کنیم ، شکل (۴-۳۱)، صفحهٔ P که درنقطهٔ O برخط d' عمود است برموازی آن نیز عمود می‌باشد ، زیراکه :



شکل(۴ — ۳۱)

$$(d' \perp P \ ، \ \delta \subset P) \Longrightarrow d' \perp \delta$$
$$(d' \perp \delta \ ، \ d \parallel d') \Longrightarrow d \perp \delta$$

یعنی خط d برهرخط دلخواه δ از صفحهٔ P عمود است ، بنابراین $d \perp P$.

می‌توان ملاحظه کرد که اگرصفحهٔ دیگری شامل نقطهٔ O و عمود برخط d باشد، ناچار برخط d' نیز عمود است (چرا ؟)، و چون برنقطهٔ O فقط یك صفحه عمود برخط d' مرور می‌کند ، صفحهٔ اخیر نیز باید برصفحهٔ P منطبق باشد . یعنی صفحهٔ شامل نقطهٔ O و عمود برخط d فقط یکی است .

تمرین

۱ ـ خط d برصفحهٔ P عمود است ، از نقطهٔ O واقع برصفحهٔ P خط d' را چنان‌مرور می‌دهیم که با خط d زاویهٔ قائمه تشکیل دهد ، ثابت‌کنید $d' \subset P$.

۲ـ ثابت‌کنید همهٔ خطهایی که از یك نقطهٔ O می‌گذرند و با خط مفروض d زاویهٔ قائمه تشکیل می‌دهند درصفحه‌ای هستند که بر خط d عمود است.

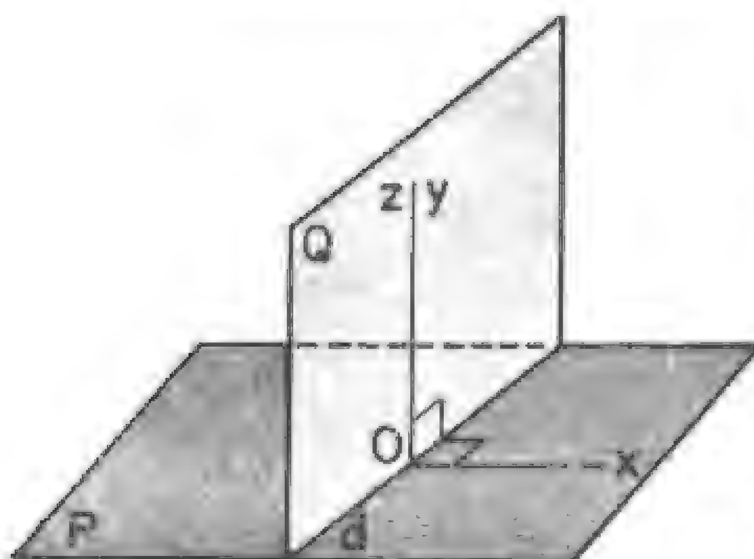
۳ ـ برنقطهٔ مفروض خطی مروردهید که‌با دوخط متنافر d و d' زاویه‌های قائمه بسازد.

۴ـ ثابت‌کنید دو صفحه متمایز عمود بر یك خط راست موازی یکدیگرند .

(۴-۹-۴) ـ قضیه ـ برهر نقطه یك‌خط‌وفقط یك‌خط عمود برصفحهٔ مفروض مرور می‌کند .

برهان ـ۱ ـ نقطهٔ O برصفحهٔ P واقع است.

نیم خط Ox $(Ox \subset P)$ وصفحهٔ Q را که در نقطهٔ O بر این نیم خط عمود است در نظر می‌گیریم، شکل (۴-۳۲).



شکل (۴ — ۳۲)

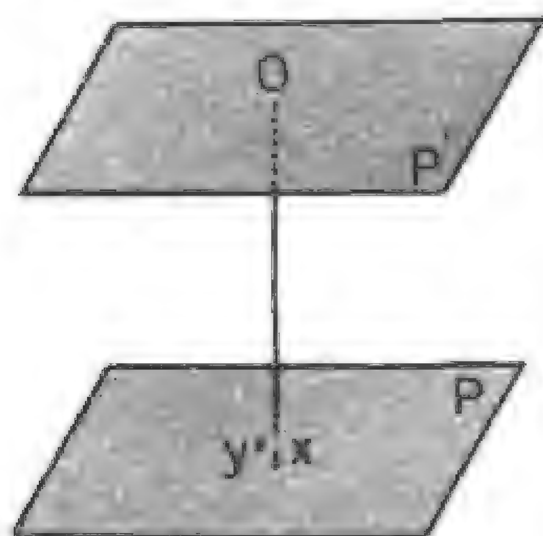
ازنقطهٔ O درصفحهٔ Q نیم خط Oy را برخط d فصل مشترك دوصفحهٔ P و Q عمود می‌کنیم، خط Oy برصفحهٔ P عمود است ، زیرا $Ox \perp Oy$ و $Oy \perp d$ ، **پس $Oy \perp P$ یعنی برنقطه O خطی**

می گذرد که برصفحهٔ P عمود است.

حال ثابت می‌کنیم که خط عمود فقط یکی است ، زیرا اگر خط دیگر Oz در نقطهٔ O برصفحهٔ P عمود باشد، صفحهٔ yOz صفحهٔ P را در خطی مانند δ قطع می کند (چرا؟). و

$$(Oy \perp P \text{ و } Oz \perp P \text{ و } \delta \subset P) \Longrightarrow Oy \perp \delta \text{ و } Oz \perp \delta$$

یعنی در این صورت لازم می‌آید که در صفحهٔ yOz درنقطهٔ O دو خط متمایز عمود برخط δ وجود داشته باشند و این نشدنی است. پس $Oz = Oy$ ؛ یعنی خطی که درنقطهٔ O برصفحهٔ P عموداست فقط یکی وهمان Oy است.



شکل (۴-۳۳)

۲- نقطهٔ O خارج صفحهٔ P است.

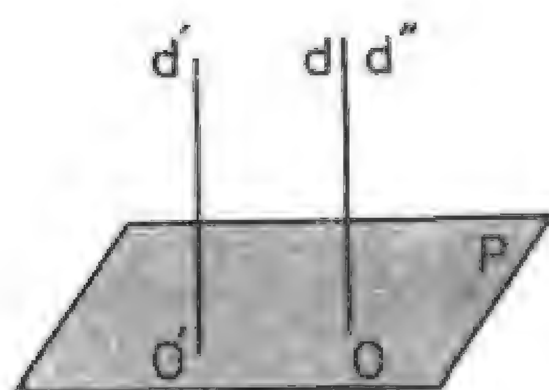
برنقطهٔ O صفحهٔ P' راموازی P مرورمی‌دهیم شکل (۴-۳۳)، اگرنیم‌خط Ox برصفحهٔ P' عمودباشد :

$$(P' \parallel P \, , \, Ox \perp P') \Longrightarrow Ox \perp P$$

حال‌ثابت‌می کنیم‌خط عمودفقط یکی است، زیرا اگرخطدیگری مانند Oy بر صفحهٔ P عمود باشد، برموازی‌آن، یعنی برصفحهٔ P' نیزعمود است ودراین‌صورت‌لازم‌می آیدکه ازنقطهٔ O دوخط‌برصفحهٔ P' عمود شده باشد واین‌ممکن‌نیست. پس $Oy = Ox$ ، یعنی‌عمودی که از نقطهٔ O برصفحهٔ P رسم می‌شود فقط یکی‌است.

نتیجهـ دوخط عمود بریك صفحه موازی یکدیگرند .

برهـان ـ اگر دو خط d و d' بر صفحهٔ P عمودباشند، شکل(۴-۳۴) واز نقطهٔ O ، محل‌تلاقی‌خط d باصفحهٔ P ، خط d'' راموازی d' رسم کنیم،



شکل (۴-۳۴)

$$(d \cap d'' = O \text{ و } d, d'' \perp P) \Longrightarrow d = d''$$

یعنی خطی که ازنقطهٔ O موازی d' رسم می‌شودهمان خط d است، به‌بیان دیگر

$$d \parallel d'$$

تمرین

۱- هریك ازعبارتهای زیرراچنان کامل کنیدکه یك گزارهٔ درست حاصل شود.

ـ خطی که بریك صفحه عمود باشدآن صفحه‌را دریك نقطه ....

ـ خطی که بریك صفحه عمودباشد باهرخط واقع برآن‌صفحه زاویهٔ ....

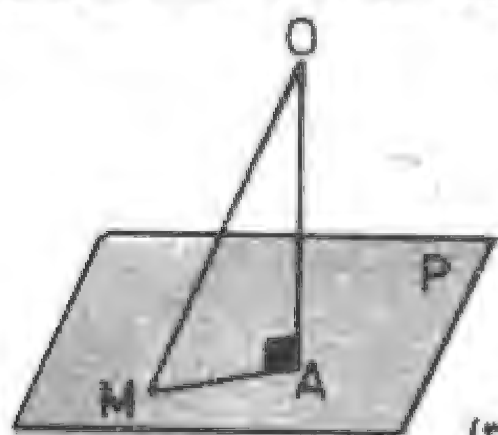
ـ خطی که بریك صفحه عمودباشد باهرخط موازی‌آن صفحه زاویهٔ ....

ـ ازهرنقطهٔ مفروض فقط یك خط عمودبریك ....

۲ـ ثابت کنید هر خط که بر یکی از دو صفحهٔ موازی عمود باشد، بردیگری نیزعمود است.

۳ـ صفحهٔ P و نقطهٔ O واقع برآن مفروضند. خطی از صفحهٔ P مشخص کنید که از نقطهٔ O بگذرد وبرخط مفروض δ عمود باشد.

۴ـ برنقطهٔ مفروض O واقع درخارج خط d خطی مرور دهیدکه با صفحهٔ مفروض P موازی باشد و با خط d زاویهٔ قائمه تشکیل دهد .



شکل (۴ـ۳۵)

(۴ـ۱۰) ـ فاصلهٔ نقطه از صفحه

صفحهٔ P ونقطهٔ O واقع درخارج آن‌رادرنظرمی‌گیریم، شکل (۴ـ۳۵)، از نقطهٔ O عمودی بر صفحهٔ P فرود می‌آوریم و فرض می‌کنیم صفحه را در نقطه‌ای مانند A قطع کرده‌است. می‌دانید که این‌عمود منحصر به‌یکی است وهرخط دیگرکه برنقطهٔ O بگذرد وصفحهٔ P را قطع‌کند برآن صفحه عمود نیست.

هرخط که صفحه‌ای را قطع‌کند وبر آن عمود نباشد، نسبت به آن صفحه یك خط مایل نامیده می‌شود، مانند مایل OM در شکل (۴ـ۳۵) .

اگر نقطه‌های A و M رابا خط راستی به هم وصل کنیم، در مثلث OAM زاویهٔ A قائمه‌است (چرا؟)، و بنابراین $OA < OM$، یعنی:

اندازهٔ پاره‌خطی که از هر نقطهٔ O بر صفحهٔ P عمود شود، از اندازهٔ هر پاره‌خط دیگری که از نقطهٔ O بگذرد و از سر دیگرش به صفحهٔ P محدود باشد، کوتاهتر است.

به بیان دیگر،

پاره خطی که ازیك نقطه خارج صفحه‌ای برآن صفحه عمود رسم می‌شودکوتاهترین پاره خطی است که بین‌آن نقطه وصفحهٔ مفروض محصور باشد، این‌کوتاهترین پاره خط محدود به‌نقطهٔ O و صفحهٔ P را فاصلهٔ آن نقطه از صفحه می‌گوییم. اگر نقطه روی صفحه باشد، فاصلهٔ نقطه‌از صفحه را صفرمی‌گیریم.

(۴ـ۱۰ـ۱) ـ عمود و مایل نسبت به صفحه ـ هر گاه پاره خط OA شکل (۴ـ۳۵) عمودی باشد که از نقطهٔ O نسبت به صفحهٔ P رسم می‌شود و پاره خط OM مایل دلخواهی گذرنده از

همان نقطهٔ O باشد، معمولاً نقاط A و M را به‌ترتیب پای عمود و پای مایل می‌نامیم.

اندازه‌های دو پاره‌خط OA و OM نیز به ترتیب اندازهٔ عمود و اندازهٔ مایل نامیده می‌شوند وچنان که ذکر شد، به ویژه اندازهٔ عمود را، که منحصر به یکی است، فاصلهٔ نقطهٔ O از صفحهٔ P می گوییم.

دربارهٔ عمود و مایلهایی که از یك نقطه نسبت به یك صفحه رسم می‌شوند ،گزاره‌هایی نظیر آنچه‌دربارهٔعمود ومایل نسبت‌به یك‌خط‌در صفحه‌دیده‌اید، می‌توان‌داشت‌که‌عبارتند از:

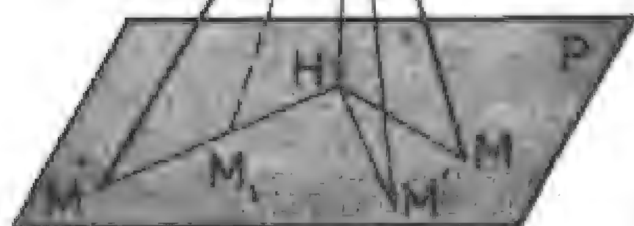
(۴-۱۰-۲)-قضیه - پاره‌خط عمودی که‌از یك‌نقطه نسبت به صفحه‌ای رسم میشوداز‌هر پاره‌خط مایلی که از همان نقطه می‌گذرد کوچکتر است.

اثبات این قضیه در بالا گفته شده است. (درشکل ۴-۳۵ در مثلث قائم الزاویهٔ OAM وتر OM از اضلاع دیگر بیشتر می‌باشد.)

(۴-۱۰-۳)-قضیه - هرگاه‌از یك‌نقطه خارج صفحه یك‌عمودو‌چندمایل نسبت‌به‌آن‌صفحه‌رسم شده‌باشند :

- مایلهایی که پای آنها‌از پای‌عمود به‌یك‌فاصله باشند‌متساویند.

- از دو مایل که پای آنها از پای عمود به‌یك فاصله نیست، آن‌که پایش به‌پای‌عمودنزدیکتر است،کوچکتر است.



شکل (۴ - ۳۶)

برهان — صفحهٔ P و نقطهٔ O در خارج آن درنظر گرفته و پای عمودی‌که از O بر P رسم می‌شود با H نمایش می‌دهیم. اگر مایلهای OM و OM' چنان باشند که $MH = M'H$ باشد، (شکل ۴-۳۶)، ثابت می‌شود که $OM = OM'$، زیرا که در دو مثلث OHM و OHM' زاویه‌های H هر دو قائمه‌اند و ضلع OH مشترك است و $MH = M'H$، بنابراین دو مثلث متساویند و در نتیجه $OM = OM'$.

در همین‌شکل‌اگرمایل OM'' نسبت به صفحهٔ P چنان‌رسم شده باشدکه $M''H > MH$ و نقطهٔ M_1 را برپاره‌خط $M''H$ چنان اختیار کنیم که $M_1H = MH$ باشد در آن صورت $OM_1 = OM$ و چون $OM'' > OM_1$ است نتیجه می‌شودکه $OM'' > OM$.

(۴-۱۰-۴)-عکس قضیه -اگر ازنقطه‌ای یك‌عمود وچند مایل نسبت به‌صفحه‌ای رسم‌شده باشند، پای مایلهای متساوی از پای عمود به یك فاصله است، اگر مایلهایی متساوی نباشند مایلی‌که

بزرگتراست پایش ازپای عمود دورتر است.

اثبات به عهدهٔ دانش‌آموزان است.

(۴-۱۰-۵) - **فاصلهٔ دو صفحهٔ متوازی**- ازآنچه ذکر شد می‌توان نتیجه گرفت که اگر دو صفحه متمایز متوازی باشند، پاره خطهایی که بر دو صفحه عمود و از دوطرف به‌صفحه‌ها محدود باشند، مساوی یکدیگرند (چرا؟). هریك از این پاره خطها درحقیقت فاصلهٔ یك نقطه دلخواه یك صفحه، ازصفحهٔ دیگر است و آن را فاصلهٔ دو صفحه می‌گوییم فاصلهٔ هر صفحه از خودش را صفر تعریف می‌کنیم.

(۴-۱۰-۶) - **فاصلهٔ خط ازصفحهٔ موازی باآن** - اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد، همهٔ نقطه‌های آن‌خط از صفحه به‌یك فاصله‌اند، (چرا؟). دراین‌صورت فاصلهٔ هرنقطهٔ خط را از صفحه، فاصلهٔ خط ازصفحه می‌گوییم. یعنی :

فاصلهٔ خط از صفحهٔ‌موازی باآن‌عبارت است ازفاصلهٔ هرنقطهٔ دلخواه خط از آن صفحه.

تمرین

۱- هر یك از عبارتهای زیررا چنان کامل کنید که یك گزارهٔ درست حاصل شود.

- فاصلهٔ هر نقطهٔ O از صفحهٔ مفروض P ....

- فاصلهٔ دوصفحهٔ متوازی ....

- فاصلهٔ هر خط از صفحه‌ای‌که با آن خط موازی است برابر است با ...

۲- ثابت کنید اگر دو نقطهٔ A و B از صفحهٔ مفروض P به‌یك فاصله و هر دو در یك طرف‌آن صفحه باشند، پاره خط AB موازی باصفحهٔ P است .

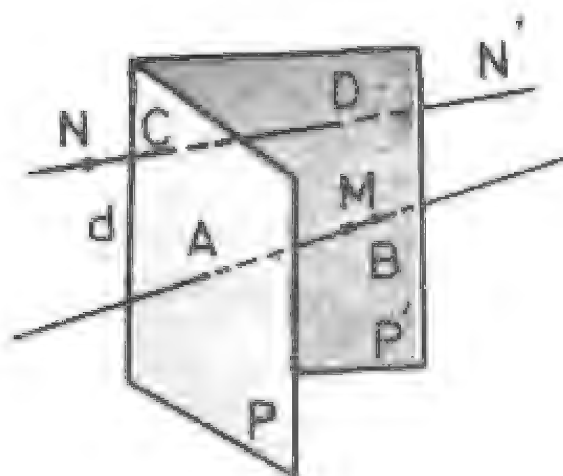
۳- ثابت‌کنید اگر دونقطهٔ A و B از صفحهٔ P به یك فاصله و در دو طرف صفحهٔ P باشند، صفحهٔ P بر وسط پاره‌خط AB می‌گذرد.

۴- ثابت‌کنید مکان هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ ثابت A و B به یك فاصله باشند، صفحه‌ای است‌که بر وسط پاره خط AB می‌گذرد و برآن پاره خط عمود است.

۵- خط δ و نقاط A و B که باآن خط در یك صفحه واقع نیستند مفروضند، بر خط δ نقطه‌ای مانند C مشخص‌کنیدکه مثلث ABC دررأس C متساوی‌الساقین باشد.

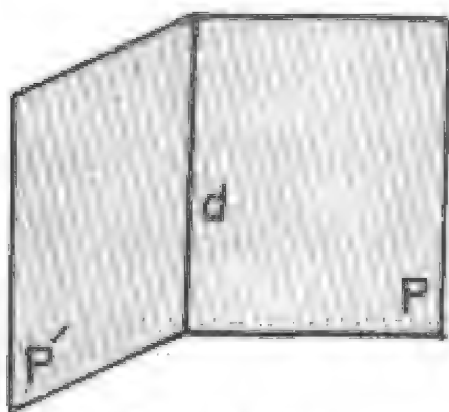
۶- صفحه‌ای مشخص‌کنیدکه خط مفروض d را شامل باشد و دونقطهٔ مفروض A و B ازآن به یك فاصله باشند.

(۴-۱۱) - زاویهٔ دوصفحه - فرجه



شکل (۴ — ۳۷)

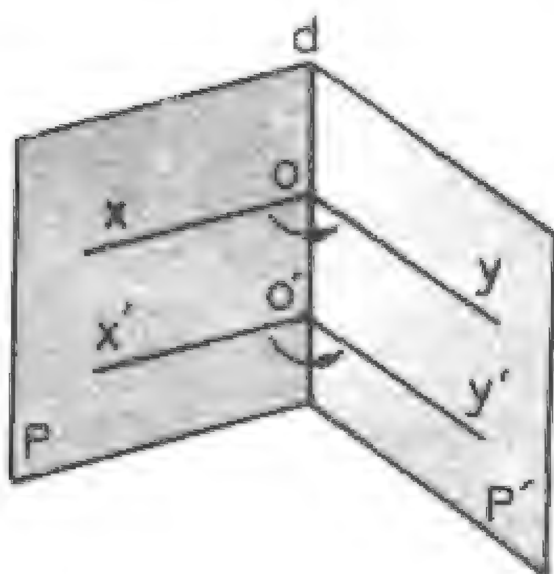
(۴-۱۱-۱)— **فرجه** — فرجه بخشی از فضا است که به دو نیم صفحه با مرز مشترك محدود می‌شود. مرز مشترك دو نیم صفحه را یال فرجه و هرنیم‌صفحه را یك وجه فرجه می‌نامند. فرجه وجه‌ها و یالهای خود را در بر دارد. اگر P و 'P وجه‌های یك فرجه و d یال آن باشند، فرجه را با نماد (PdP') نمایش می‌دهیم. باهر دو نیم صفحه دو فرجه‌مشخص می‌شوند. در حالتی‌که اجتماع نیم صفحه‌های P و 'P یك صفحه تشکیل دهد، هریك از دو فرجه بدست آمده یك نیم فضا است و خاصیتهای نیم فضا را قبلا دانستیم. در حالتهای دیگر دو فرجه نابرابرند و می‌توان یکی را بر زیر مجموعـه‌ای از دیگری منطبق کرد. هر نقطه M در فرجه کوچکتر را می‌توان چنین توصیف کرد: هر خطی که از نقطه M بگذرد و وجه‌های فرجه را در A و B قطع کند، نقطهٔ M خارج A و B قرار نمی‌گیرد. هر نقطهٔ N درفرجهٔ بزرگتر را می‌توان چنین توصیف کرد؛ هرخطی که از نقطهٔ N بگذرد و دو وجه فرجه را در C و D قطع کند، نقطهٔ N بین C و D قرار نمی‌گیرد.



(شکل ۴ — ۳۸)

فرجه درفضامانند زاویه‌است درصفحه، فرجه‌راگاهی‌زاویهٔ دوسطحی می‌گوییم.

(۴-۱۱-۲) - **زاویـهٔ مسطحهٔ فرجه** - زاویهٔ مسطحه فرجه‌زاویه‌ای‌است که‌درفرجه قرار گرفته و رأس‌آن نقطه‌ای از یال فرجه و هر ضلع آن در یکی ازوجه‌ها بریال فرجه عمود باشد.



شکل (۴ — ۳۹)

در شکل (۴-۳۹)، $\widehat{xOy}$ که در آن‌ضلع Ox روی‌صفحهٔ P وعمودبریال d وضلع Oy روی‌صفحهٔ 'P وعمودبرd است، یك‌زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ (PdP') است.

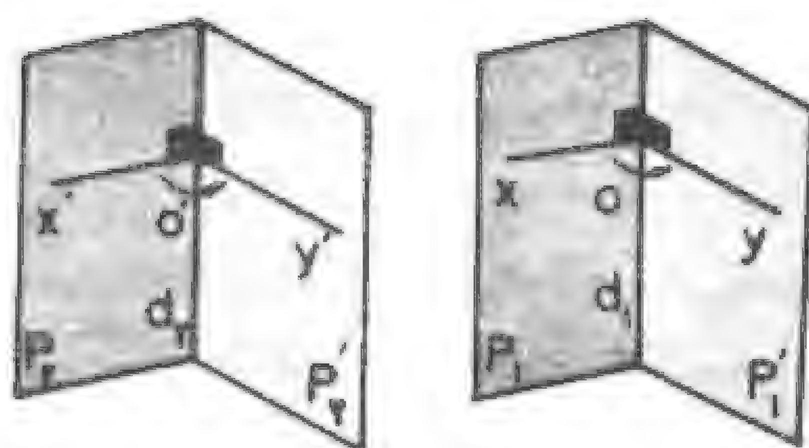
درهر نقطه‌ازیال یك‌فرجه، یك‌زاویهٔ مسطحه می‌توان‌ساخت، یعنی‌هر فرجه‌زاویه‌های‌مسطحهٔ بی‌شماردارد، امّاهمهٔ این‌زاویه‌ها مساوی یکدیگرند. زیرا اگر زاویه‌های xOy و $x'O'y'$ دو زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ (PdP') باشند، چون Ox و $O'x'$ در صفحهٔ P واقع بوده و Oy و $O'y'$ برصفحهٔ P' قراردارند،

$$\left.\begin{matrix} Ox, O'x' \perp d \Longrightarrow Ox \parallel O'x' \\ Oy, O'y' \perp d \Longrightarrow Oy \parallel O'y' \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$$

صفحهٔ هرزاویهٔ مسطحه یك فرجه بریال‌آن عموداست، (چرا؟). بنابراین می‌توان گفت: مقطع‌هر صفحهٔ عمود بریال یك فرجه باآن فرجه، یك زاویهٔ مسطحهٔ فرجه است.

(۴-۱۱-۳)ـقضیهـ اگرزاویه‌های مسطحهٔ دوفرجه متساوی باشند، فرجه‌ها مساوی یکدیگر ند.

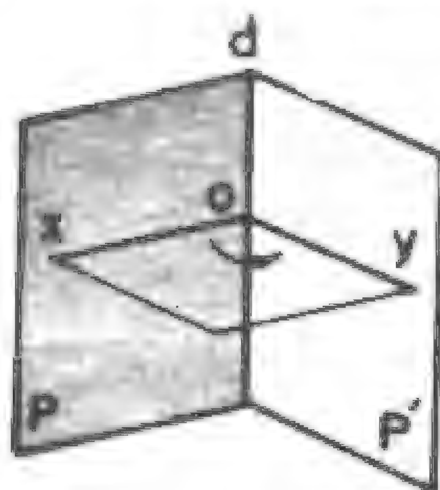
برهان ـ اگر $\widehat{xOy}$ مسطحهٔ فرجهٔ $(P_1 d_1 P'_1)$ و $\widehat{x'O'y'}$ مسطحهٔ فرجهٔ $(P_2 d_2 P'_2)$ باشد، $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$ شکل (۴-۴۰)، و فرجهٔ $(P_1 d_1 P'_1)$ رادرفضاجابه‌جا کنیم تا $\widehat{xOy}$ بر مساوی آن $\widehat{x'O'y'}$ منطبق شود، با توجه‌به آن که یالهای دو فرجه بر صفحه‌های دو زاویهٔ مسطحهٔ فرجه‌ها عمودند، ناچار خطهای d_1 و d_2 که برصفحه‌های زاویه‌ها عمود هستند بریکدیگر منطبق خواهندشد،



شکل (۴ ـ ۴۰)

پس در حالت‌انطباق زاویه‌های مسطحه، دووجه P_1 و P_2، که در دو خط متقاطع Ox و d_1 (یا در دوخط $O'x'$ و d_2)، مشترکند بریکدیگرمنطبق می‌شوند، زیرا بردوخط متقاطع تنها یك صفحه می‌گذرد. به‌همین دلیل در حالت انطباق دوزاویهٔ مسطحه، دو وجه P'_1 و P'_2 از دو فرجه‌روی‌هم قرارمی‌گیرند، پس‌دوفرجه بریکدیگرمنطبق خواهند شد، بنابراین‌مساوی‌یکدیگرند.

روشن است که دردو فرجهٔ متساوی زاویه‌های مسطحه مساوی یکدیگرند، یعنی عکس قضیهٔفوق نیزصحیح‌است.



شکل (۴ ـ ۴۱)

(۴-۱۱-۴)ـ اندازهٔ فرجه ـ هرفرجه با زاویهٔ مسطحه‌اش شناخته می‌شود، زیرا اگر $\widehat{xOy}$ یکی از زاویه‌های مسطحهٔ فرجه‌ای باشد، شکل (۴-۴۱)، ودررأس این زاویه خط d را عمود برصفحهٔ آن در

نظر بگیریم، هریك ازوجه‌های فرجه با دو خط متقاطع، (d، Ox یا d، Oy) مشخص می‌شود و بنابراین فرجه‌ای کـه $\widehat{xOy}$ مسطحهٔ آن است، مشخص می‌گردد.

باتوجه به‌آن که درهرفرجه همهٔ زاویه‌های مسطحه متساویند واندازهٔ زاویهٔ مسطحه‌مستقل ازانتخاب رأس زاویه‌است، اندازهٔ زاویهٔ مسطحه به‌عنوان اندازهٔ فرجه به‌کارمی‌رود. یعنی اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ هرفرجه رااندازهٔفرجه درنظر می‌گیریم.

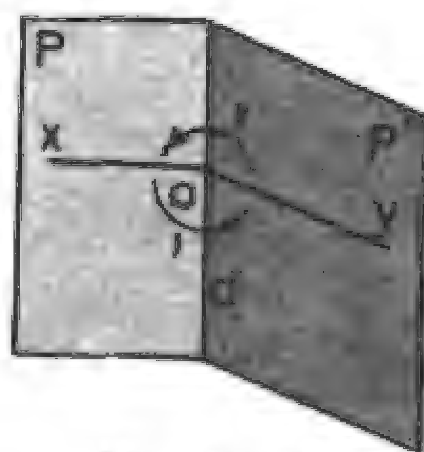
اندازهٔ فرجه را مانند اندازهٔ زاویه می‌توان برحسب درجه و دقیقه و ثانیه، یا برحسب گراد، یابرحسب رادیان، بیان کرد.

زاویهٔ دوصفحه ــ اگر دو صفحه متقاطع باشند، از تقاطع آنها فرجه‌هایی پدید می‌آید. مسطحه‌های فرجه‌های مزبور اندازهٔ فرجه‌هارا مشخص می‌کنند. هریك ازاین زاویه‌های مسطحهٔ فرجه‌هایی که پدیدآمده‌اند یك زاویهٔ بین دوصفحه گفته می‌شوند ودرحالت کلی معمولاآن‌زاویه‌را که کوچکتراست زاویهٔ بین دوصفحه می‌گیرند. بنابراین:

زاویهٔ بین دو صفحه، زاویهٔ مسطحهٔ فرجه‌ای است که از تقاطع آنها پدید می‌آید. به‌بیان دیگر، اگر دوصفحه درخطی مانند d متقاطع باشند ودریك نقطه ازخط d صفحه‌ای برآن عمود کنیم، این‌صفحه بادوصفحهٔ مزبور دردوخط متقاطع است، زاویهٔ بین دوخط مزبوررا زاویهٔ بین دوصفحه می‌گوییم.

(۴-۱۱-۵) ــ فرجه‌های گوژ و کاو ــ

دونیم صفحه که مرزمشترك داشته باشند، دوفرجه مشخص می‌کنندکه معمولا زاویهٔ مسطحهٔ یکی‌ازآنهازاویهٔ گوژ(کوچکتر ازیا برابر با $180°$) و زاویهٔ مسطحهٔ دیگری، زاویهٔ کاو(بزرگتر از $180°$) است، مانند زاویه‌های O_1 و O_2 درشکل (۴-۴۲).



شکل (۴ ــ ۴۲)

فرجه‌ای راکه زاویهٔ مسطحهٔ آن گوژ باشد، فرجهٔ گوژ وآن راکه زاویهٔ مسطحه‌اش کاو باشد، فرجهٔ کاو می‌گوییم.

معمولا وقتی‌ازفرجهٔ حاصل‌ازدونیم صفحه، به‌عنوان مطلق وبدون قیدنوع سخن‌می‌گوییم، مقصودهمان فرجهٔ گوژ بین‌دونیم صفحه است. درتعیین زاویهٔ‌بین دوصفحه نیزعموماً درمطالعات خود زاویهٔ کوچکتری راکه بین دوصفحه تشکیل می‌شود زاویهٔ دوصفحه می‌گیریم.

فرجهٔ نیم‌فضا ــ فرجه‌ای راکه دووجه‌آن بریك صفحه واقع‌باشند، فرجهٔ نیم‌فضامی گوییم. اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ نیم‌فضا $180°$ است. بنابراین می‌توان گفت:

نیم فضا فرجه‌ای است که اندازهٔ زاویهٔ مسطحه‌اش 180° باشد.

فرجهٔ قائمه ـ فرجهٔ قائمه‌آن است که اندازهٔ زاویهٔ مسطحه‌اش 90° باشد. هرفرجهٔ قائمه نصف یك فرجهٔ نیم فضاست.

تمرین

۱ـ هریك ازعبارتهای زیررا چنان کامل کنیدکه یك گزارهٔ درست حاصل شود.

ـ هرفرجه بادونیم صفحه که .... باشند مشخص می‌شود.

ـ هرفرجه دارای دو.... ویك.... است.

ـ هرفرجه بازاویهٔ مسطحهٔ خود .... است.

ـ فرجهٔ کوژ فرجه‌ای است که ....

۲ـ آیامی‌توانید صفحهٔ نیمساز یك فرجه‌راتعریف کنید؟ هرفرجه چند صفحهٔ نیمسازدارد؟

۳ـ دوصفحهٔ متقاطع چند فرجه مشخص می‌کنند؟

۴ـ دونیم‌صفحه درچه‌صورت فرجه پدید می‌آورند؟ چند فرجه؟

۵ـ اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ فرجه‌ای 180° است، فرجه کوژ است یا کاو؟

۶ـ صفحهٔ نیمساز یك فرجهٔ قائمه ازآن فرجه چه فرجه‌هایی پدید می‌آورد؟

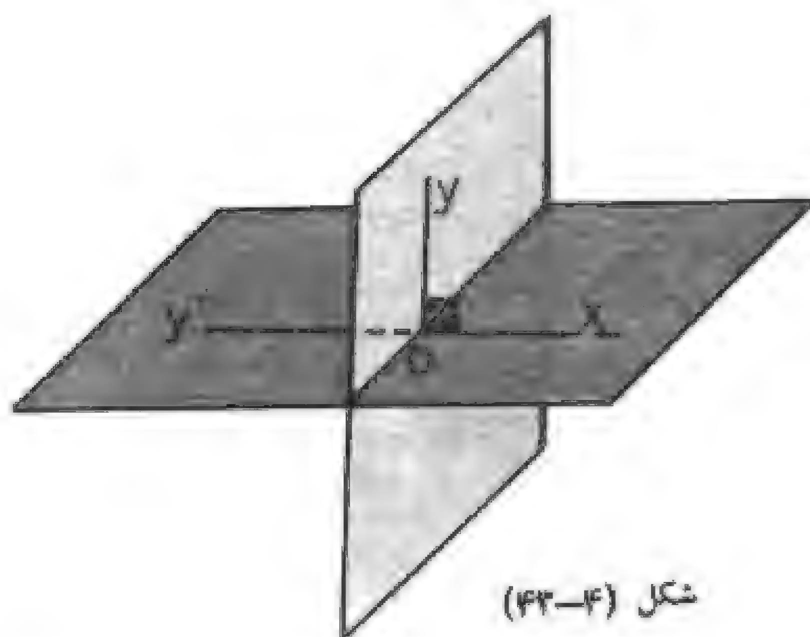
۷ـ آیا می‌توانید به‌همان‌صورت که درمورد زاویه‌ها دیده‌اید، فرجه‌های مجاور و مجانب ومتقابل به یال راتعریف کنید؟

۸ـ دربارهٔ دوفرجهٔ مجانب و متقابل به‌یال چه گزاره‌هایی می‌توانید بیان کنید؟

(۴ـ۱۲) ـ صفحه‌های عمود برهم

(۴ـ۱۲ـ۱) ـ تعریف ـ دو صفحهٔ متقاطع رادرصورتی‌عمود برهم‌می‌گوییم که‌فرجه‌های بین‌آنها قائمه باشند. روشن است که اگر یکی از **چهارفرجه کوژی که ازتقاطع‌دوصفحه** پدید می‌آیندقائمه‌باشد، سه‌فرجهٔ دیگرقائمه‌اند (چرا؟)، بنابراین:

دوصفحهٔ متقاطع وقتی برهم عمود هستند که از تقاطع آنها فرجه‌های قائمه پدیدآید شکل(۴ـ۴۳).



شکل (۴ـ۴۳)

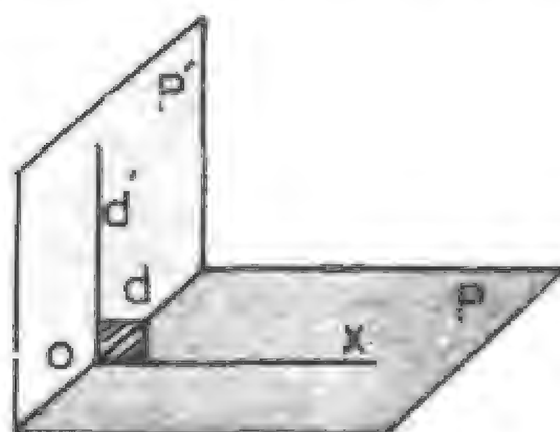
شرط آن که دوصفحه برهم عمود باشند.

(۴-۱۲-۲)ـ قضیه ـ اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، هر صفحه که بر آن خط بگذرد، بر صفحهٔ مفروض عمود است.

یعنی اگر d' یک خط و P و P' دو صفحه باشند،

$$(d' \perp P \ , \ d' \subset P') \Longrightarrow (P' \perp P)$$

برهان ـ اگر در شکل (۴-۴۴)، خط d' بر صفحهٔ P عمود باشد، آن صفحه را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کند. هر صفحهٔ P' که برخط d' بگذرد، صفحهٔ P را درخطی مانند d که بر نقطهٔ O می‌گذرد قطع می‌کند (چرا ؟). و اگر نیم‌خط Ox در صفحهٔ P برخط d عمود باشد،



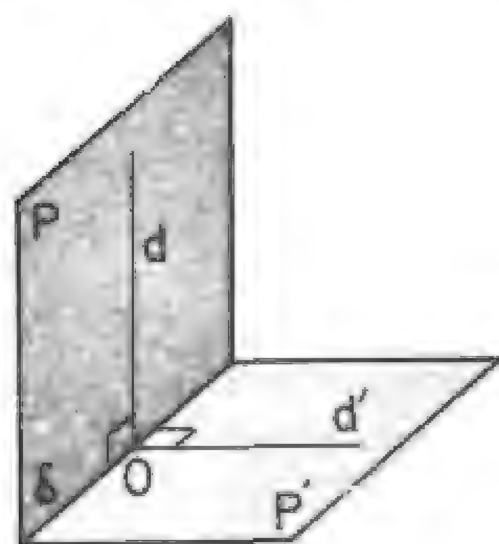
شکل (۴-۴۴)

$$d' \perp P \Longrightarrow (d' \perp d \ , \ d' \perp Ox)$$

اما خطهای d' و Ox که درنقطهٔ O بر خط d عمودند به ترتیب بر دو صفحهٔ P' و P واقعند. بنابراین $\widehat{d'Ox}$ مسطحهٔ فرجهٔ بین دوصفحه است و چون این زاویه قائمه است، $P' \perp P$.

نتیجه ـ دوصفحه درصورتی بریکدیگر عمودند که یک خط از یکی بردیگری عمود باشد.

(۴-۱۲-۳)ـ قضیه ـ اگر دوصفحه برهم عمود باشند، هر خط که دریکی از آنها برفصل مشترکشان عمود باشد، بر صفحهٔ دیگر عمود است.



شکل (۴ ـ ۴۵)

برهان ـ فرض می‌کنیم که درشکل (۴-۴۵)، دو صفحهٔ P و P' به صورتی در نظر گرفته شده باشند که $P \perp P'$ و $P \cap P' = \delta$ باشد و خط d' در صفحهٔ P' برخط δ، فصل مشترک دو صفحه عمود باشد. در این صورت باملاحظهٔ آن که دو خط d و d' دردو صفحهٔ مفروض ودریک نقطه برفصل مشترک آنها عمودند، $\widehat{d'Od}$ مسطحهٔ فرجهٔ بین دو صفحه است. اما دو صفحه برهم عمودند، بنابراین $\widehat{d'Od} = ۹۰^\circ$ و درنتیجه $d' \perp d$ و $d' \perp \delta$ پس $d' \perp P$.

روشن است که برهرخط d صفحه‌های بی‌شمارمی گذرد. پس اگرخط d برصفحه‌ای مانند P عمود باشد، همهٔ صفحه‌هایی که بر d می گذرند برصفحهٔ P عمودند. بنابراین :

برهرخط عمود بریک‌صفحه، صفحه‌های بی‌شمار عمود برآن صفحه می گذرند.

تمرین

۱- هریک ازاین عبارتها راچنان کامل کنید که یک گزارهٔ درست حاصل شود.

- دونیم صفحه که مرزمشترک داشته باشند درصورتی بریکدیگر عمودندکه ....
- دوصفحهٔ متقاطع وقتی بریکدیگر عمودندکه ....
- برهرخط عمود بریک صفحه، صفحه‌های بی‌شمارمی گذرندکه همهٔ آنها بر .... عمودند.
- برهرخط ازیک صفحه .... می گذردکه برصفحهٔ مزبور عموداست .

۲- ازهرنقطهٔ واقع درخارج یک‌صفحه، چندصفحه عمود برآن صفحه می گذرد .

۳- صفحهٔ P ونقطهٔ O روی P ونقطهٔ A خارج P مفروضند. صفحه‌ای مشخص کنید که برنقاط A و O بگذرد وبرصفحهٔ P عمود باشد. دروجود جواب بحث کنید.

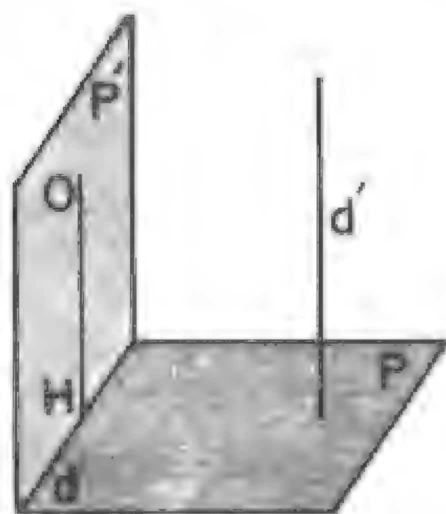
۴- صفحهٔ P ودونقطهٔ A و B درخارج آن صفحه مفروضند ، صفحه‌ای مشخص کنید که بردونقطهٔ A و B بگذرد وبرصفحهٔ P عمود باشد (بحث) .

۵- ثابت کنید اگریکی ازدوصفحهٔ متوازی برصفحه‌ای عمودباشد، دیگری نیزبرآن صفحه عمود است .

گزاره‌هایی دربارهٔ صفحه‌های عمود برهم

(۴-۱۲-۴) — قضیه- اگردوصفحه بریکدیگر عمود باشندهرخط عمود بریکی از آنها بادیگری موازی است.

برهـان - دوصفحهٔ P و P' ویک‌خط d' درنظرمی گیریم، چنان که $P \perp P'$ و $d' \perp P$ باشد ، شکل (۴-۴۶). گوییم اگرخط d' باصفحهٔ P' در نقطه‌ای مثلا نقطهٔ O ، متقاطع باشد ، از نقطهٔ O نیم‌خطی مانند OH درصفحهٔ P' می‌توان رسم کرد که بر خط d فصل مشترک دو صفحه عمود باشد، به‌موجب قضیهٔ قبل



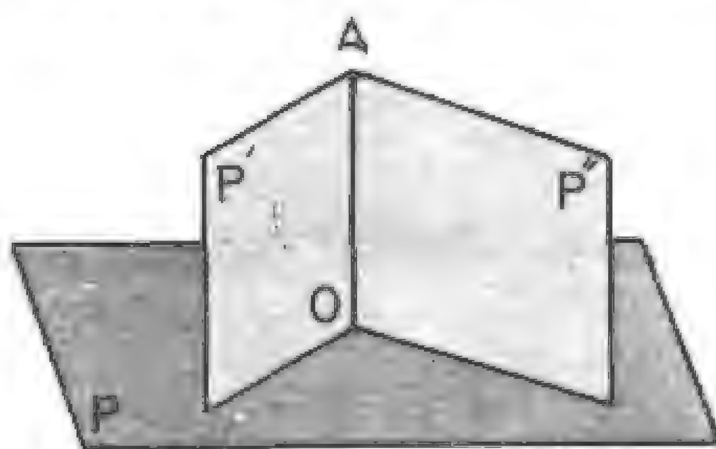
شکل (۴-۴۶)

این‌نیم خط برصفحهٔ P عمود است. اماازهرنقطه فقط یك عمود بریك صفحه می‌توان رسم کرد، پس‌اگرخط d' ازنقطهٔ O بگذرد لزوماً بر OH منطبق‌است . یعنی: $d' \subset P'$.

پس d' یا اصلا نقطهٔ مشترکی با P' ندارد و یا تماماً روی P' قرار دارد.

نتیجهٔ ۱ ــ اگردوصفحه برهم‌عمود باشند، خطی که ازیك نقطهٔ واقع بریکی برصفحهٔ دیگر عمودباشد، برصفحهٔ اول منطبق خواهدبود.

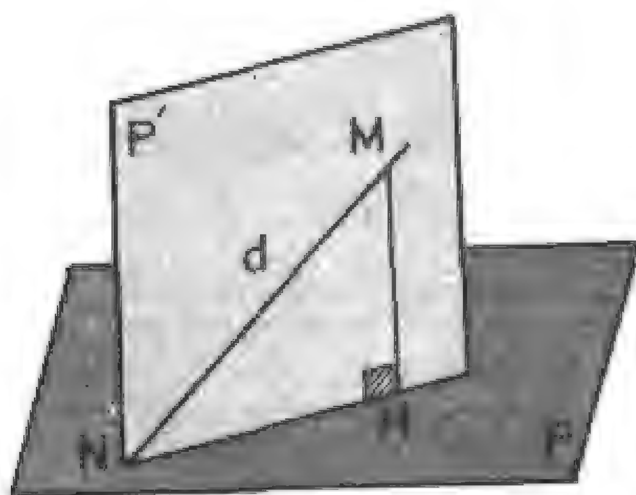
نتیجهٔ ۲ ــ اگردو صفحهٔ متقاطع برصفحه‌ای عمود باشند، فصل مشترك آنها برآن صفحه عمود است .



شکل (۴ ــ ۴۷)

برهان ــ اگر دو صفحهٔ متقاطع P' وP'' برصفحهٔ P عمودباشند و AO فصل مشترك آنها باشد، خطی که از نقطهٔ A می گذرد وبرصفحهٔ P عموداست برهر دوصفحهٔ P' و P'' منطبق خواهد بود ، (نتیجه۱) وبنابراین فصل‌مشترك‌دوصفحه است، یعنی‌فصل‌مشترك‌دوصفحهٔ P' وP'' خود برصفحهٔ P عموداست، $AO \perp P$ شکل (۴ــ۴۷).

(۴-۱۲- ۵) ــقضیه- برهرخط که برصفحه‌ای‌عمود نباشد ، یك صفحه‌وفقط یك صفحه عمود برصفحه مفروض می‌گذرد.



شکل (۴ ــ ۴۸)

برهان ــ صفحهٔ P وخط d را که برآن عمود نیست درنظرمی گیریم، شکل (۴ــ۴۸) .

از نقطهٔ دلخواه M روی d یك خط مانند MH می گذرد که برصفحهٔ P عمود است . چون خط d بر صفحهٔ P عمود نیست ، دو خط d و MH امتداد هــای مختلف دارند وبنابراین دو خط متمایزند که درنقطهٔ M متقاطع هستند، بنابراین‌صفحه‌ای مانند P' مشخص می‌کنند. این‌صفحه برصفحهٔ مفروض P عمود است (قضیه ۴ــ ۱۲ ــ ۲).

حال ثابت می‌کنیم صفحه‌ای کــه برخط d می‌گذرد و عمود بر صفحهٔ P است ، منحصر به‌یکی است. برای این‌منظورگوییم اگرصفحهٔ دیگری، مثلا P'' ، شامل خط d و برصفحهٔ P عمود باشد :

$$(P'' \perp P\, ,\, M \in P'',\, MH \perp P) \Longrightarrow MH \subset P''$$

یعنی صفحهٔ P'' نیز دو خط d و MH را شامل است و بنابراین همان صفحهٔ P' است (چرا؟).

تمرین

۱- هریک از عبارتهای زیر را چنان کامل کنید که یک گزارهٔ درست حاصل شود.

- اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد.... صفحه بر آن می گذرد که بر صفحهٔ مزبور عمود باشد.

- اگر خطی بر صفحه‌ای .... باشد صفحه‌های بی‌شمار وجود دارند که بر آن خط می گذرند و بر صفحهٔ مزبور ....

- اگر صفحه‌ای بر دو صفحهٔ متقاطع عمود باشد، بر.... آنها عمود است.

۲- آیا دو صفحهٔ عمود بر یک صفحه لزوماً متوازیند؟ چرا؟

۳- صفحهٔ P و خط d و نقطهٔ A که خارج خط و صفحه است، مفروضند. صفحه‌ای مشخص کنید که بر نقطهٔ A بگذرد و با خط d موازی و بر صفحهٔ P عمود باشد (بحث).

۴- صفحهٔ P و خط d منطبق بر آن صفحه و خط دیگر d' که موازی آن صفحه است مفروضند، پاره خطی مشخص کنید که بر صفحهٔ P عمود باشد و دو سر آن بر دو خط d و d' واقع باشند (بحث).

۶

۴ خواندنی

عمر خیام

ریاضی‌دان، منجم ، فیلسوف وشاعر معروف ایرانی ، **حکیم عمر خیام** ، ازمفاخر تاریخ تمدن انسانی است . نامش را غیاث‌الدین ابوالفتح عمر ضبط کرده‌اند و تولدش را در حدود ۴۳۹ هجری قمری درنیشابوریا در حوالی آن شهر نوشته‌اند ، به هرحال وی از نیشابور بود و درهمان منطقه زیست و در بیش‌از ۷۰ سال زندگی خویش تنها چند سفر کوتاه داشت‌که از آن جمله سفر حجاز و اصفهان وهرات وبلخ درتاریخ آمده‌اند .

خیام به علت تسلطی‌که برفلسفه ونجوم وریاضیات داشت از حکمای معروف دورهٔ اسلامی به شمار می‌رود وبا رباعیات معروفش،که هریك درقالب کلماتی چند یك دنیا معنی‌ومفهوم ارائه می‌کنند، درجهان‌متمدن شخصیتی شناخته شده و مورد احترام دارد.

پژوهشهای عمرخیام دربخشهای مختلف نجوم، جبر ومقابله وهندسه درخورتوجه هستند و درهرزمینه رساله‌هایی از وی به یادگار مانده است که نسبت به آثار گذشتگان نوآوریها و تازه‌هایی را ارائه می‌دهند .

روشی‌که خیام درحل مسائل به‌کارمی‌برد حکایت از این داردکه وی در مسئله‌های هندسه ازمعادله‌های‌جبری‌استفاده می‌کرده است ودرحل‌معادله‌های درجهٔ سوم ویژگیهای مقاطع مخروط را مورد توجه قرار می‌داده است. این درحقیقت یك قدم بزرگ درابتکار هندسهٔ تحلیلی است . همان ابتکاری که **دکارت** در حدود چهار صد سال بعد به تدوین اصول آن پرداخته است .

ازکوششهای دیگری‌که در زمینهٔ تلفیق‌مباحث مختلف‌ریاضیات به عمل آمده است تعریف‌نسبتهای مثلثاتی‌کمانها وزاویه‌ها واستفاده ازآنها درحل‌مسئله‌های هندسه ازطریق محاسبه است . عمر خیام دراین زمینه نیز از پیشقدمان به شمار می‌رود و درپایه‌گذاری تقویم جلالی و مطالعات نجومی ، با همکاری حکمای معاصر خویش ، از این روش بهرهٔ شایان گرفته است .

درمقاله‌هایی‌که ازعمرخیام باقی‌مانده‌اند از توجه وی به اعدادگنگ آثاری‌ارزنده دیده می‌شود و هرچند درزمان او رده‌بندی اعداد به صورت امروزی آن شکل نگرفته و عنوان نشده بود، اما ملاحظات‌آنان دربارهٔ شناخت اعدادگویا وگنگ شامل پیشرفتهایی است‌که به عنوان مقدمات شناسایی سیستم اعداد پایه‌هایی استواربه شمار می‌روند وهنوز

درحدود ده قرن وقت لازم بود تا **نگره** اعداد به صورت امروزی آن شکل گیرد .

گاهی در تاریخ تکوین علم ، مدتی درحدود هزارسال ، برای پیدایش یك **نگره** و پذیرفته‌شدن آن، زمانی چندان دراز نیست. بنابراین به تعبیری می‌توان عمرخیام را از پایه‌گذاران **نگره** اعداد به شمار آورد .

" مسائل مختلف "

۱ ـ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ از نقطهٔ A خطی رسم می‌کنیم تا قطر BD یا امتداد آن را در نقطهٔ M و خطهای BC و CD را به ترتیب در نقاط N و L قطع کند، ثابت کنید: $AM^2 = ML \cdot MN$.

۲ ـ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ بردایره‌ای محیط است. ثابت کنید نقاط تماس دایرهٔ محاطی با دوساق آن و نقطهٔ تقاطع دوقطر ذوزنقه سه نقطهٔ واقع بریك خط راستند.

۳ـ سه نقطهٔ A و B و C مفروضند، اولا ازنقطهٔ C خطی رسم‌کنیدکه نسبت فاصله‌های آن ازدونقطهٔ A وB مساوی عدد مفروض k باشد، (مسئله چندجواب دارد؟). ثانیاً درصفحهٔ این سه نقطه خطی رسم‌کنیدکه فاصله‌های آن ازسه نقطهٔ مزبور به‌ترتیب باسه عدد ۲ و ۳ و ۴ متناسب باشند (مسئله چند جواب دارد؟).

۴ـ نقطه‌های M و N به‌ترتیب بر ضلعهای AB و AC از مثلث ABC چنانند که $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{AC} = \alpha$ ، اگر MN امتداد BC را در P قطع کند، نسبت $\frac{PC}{BC}$ را برحسب α بدست آورید.

۵ ـ دوخط متقاطع d و d' و نقطهٔ A درصفحهٔ P مفروضند، برنقطهٔ A خطی مرور دهیدکه دوخط d و d' را بـه ترتیب در نقاط M وN قطع‌کند و: اولاً $MA = AN$ ، ثانیاً $AM : AN = k$ باشد (k عدد مفروضی است). در حـالتی که d و d' موازی باشند (بحث کنید).

۶ ـ درمثلث ABC خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تـا دوضلع AB و AC را به ترتیب در نقاط M و N قطع‌کند. نقطهٔ تلاقی دوپاره خط CM و BN را P می‌نامیم مکان هندسی نقطهٔ P را وقتی پاره خط MN تغییر می‌کند تعیین‌کنید.

۷ ـ درچهار ضلعی گوژ $ABCD$ خطی موازی قطر BD رسم می کنیم تا اضلاع AB و AD را به ترتیب درنقاط M و N قطع‌کند و خط دیگری موازی همان قطر رسم می‌کنیم‌تا بـه اضلاع BC و CD به ترتیب درنقاط M' و N' برخورد کند. ثابت کنید دوخط MM' وNN' در نقطه‌ای واقع برنظر AC تلاقی می‌کنند یا با قطر AC موازیند. در چه صورت موازی AC هستند؟

۸ - دومستطیل متشابهند. اندازه های درازاهای آنها به نسبت ۳ و۴ هستند. اگراندازهٔ درازا و پهنای مستطیل کوچکتر به ترتیب ۹ و ۵ سانتیمتر باشند ، اندازه های درازا وپهنای مستطیل بزرگتر را تعیین کنید . نسبت تشابه در این دوشکل چیست ؟ نسبت مساحتهای آنها را تعیین کنید . آیا نسبت مساحتها با نسبت تشابه یکی است ؟

۹ - دومثلث متشابهند، اندازه های دوضلع از مثلث اول ۲۰ و ۳۵ واندازه های دوضلع از مثلث دوم ۱۴ و ۱۸ سانتیمترند . اندازهٔ سومین ضلع هرمثلث را تعیین کنید .

۱۰ - درلوزی ABCD زاویهٔ A مساوی 60° است ، از رأس C خطی اختیاری رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در نقطهٔ M و امتداد ضلع AD را درنقطهٔ L قطع کند . ثابت کنید مثلثهای MBD و DBL متشابهند .

۱۱ - درمثلث ABC زاویهٔ A از دو زاویهٔ B وC بزرگتر است. برضلع BC نقطه‌های M وN را چنان اختیارمی‌کنیم که AM و AN به ترتیب با اضلاع AB و AC زاویه‌هایی مساوی $\hat{C}$ و $\hat{B}$ تشکیل دهند . ثابت‌کنید اولا مثلث AMN متساوی‌الساقین است. ثانیاً دومثلث ABM وACN با مثلث ABC متشابهند و در نتیجه خود با یکدیگر متشابهند و ازآنجا نتیجه بگیرید که

$$AM^2 = AN^2 = BM.CN$$

تحقیق‌کنید درچه صورت دوخط AM و AN بریکدیگر منطبق می‌شوند و دراین حالت خط مزبورکدام‌یك ازاجزای‌مثلث است و رابطهٔ فوق به چه صورت‌تبدیل می‌شود؟ آیامی‌توانید از صورت اخیر رابطه گزاره‌ای دربارهٔ نوع آن مثلث بیان کنید.

۱۲- در مثلث ABC زاویه A قائمه است. ارتفاع AH را رسم کنید. بر ضلع AB مربع $ABB'A'$ را بنا کنید و برپاره خط BH مستطیلی بسازید که ضلع دیگر آن مساوی BC باشد، ثابت‌کنید درشکل(۱):

$$\triangle ABB_1 = \triangle B'BC$$

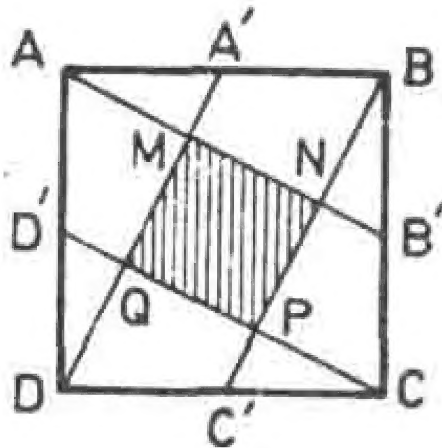
رابطهٔ بین مساحت مثلث $B'BC$ را با مساحت‌مربع $ABB'A'$ وهم‌چنین رابطهٔ بین‌مساحت‌مثلث ABB_1 را با مساحت مستطیل $BB_1H'H$ تعیین کنید. ازاین استدلال چه نتیجه‌ای می گیرید ؟

شکل ۱

۱۳- ثابت‌کنید اگردرمثلث قائم‌الزاویه‌ای‌اندازهٔ یکی از زاویه‌های حاده 15° باشد،

اندازهٔ ارتفاع وارد بروتر آن $\frac{1}{4}$ اندازهٔ وتر است.

۱۴- درمثلث‌قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ یک‌زاویه $15°$ است و اندازهٔ یک ضلع زاویهٔ قائمه ۱۲ سانتیمتر است. اندازه‌های اضلاع و زاویه‌های دیگر مثلث و اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر را حساب کنید (مسئله را در دو حالت حل کنید).



شکل ۲

۱۵- در شکل (۲) چهارضلعی ABCD مربعی است که اندازهٔ هر ضلع آن مساوی a است، نقاط A' و B' و C' و D' وسطهای اضلاع مربعند. ثابت‌کنید چهارضلعی MNPQ مربع است. مساحت این مربع را برحسب a تعیین‌کنید.

۱۶- در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی اندازه‌های دوقاعده به ترتیب ۱۶ و ۸ سانتیمتر ویکی از زاویه‌ها $60°$ است. مساحت و محیط ذوزنقه را حساب کنید (اندازهٔ هریک از دوقطر و پاره خطهایی را کـه دوقطر بریکدیگر جدا می‌کنند تعیین کنید. اگردوساق ذوزنقه‌در نقطهٔ O یکدیگر را قطع کرده باشند، اندازه‌هـای اضلاع هریک از دومثلثی راکه نقطهٔ O رأس ویکی از قاعده‌های ذوزنقه قاعدهٔ آنها است تعیین کنید.

۱۷- ثابت کنید نیمسازهای زاویه‌هایی که از تلاقی اضلاع مقابل یک چهارضلعی محاطی پدید می‌آیند، بریکدیگر عمودند.

۱۸- برقطر AB از نیمدایره‌ای به شعاع R نقطهٔ M را چنـان اختیار می‌کنیم کـه $AM = 2x$ باشد. دو نیمدایره به قطرهای AM و BM رسم می‌کنیم، مساحت محصور بین سه نیمدایره را برحسب x و R تعیین‌کنید (در ۴ حالت).

ثابت‌کنید درحالتی‌که هرسه نیمدایره دریک طرف قطر AB واقع باشند مساحت محصور بین آنها با مساحت دایره‌ای به قطر MP برابر است (نقطه P محل تلاقی نیمدایرهٔ مفروض با عمودی است‌که در نقطهٔ M برقطرAB رسم می‌شود). نقطهٔ M را به چه فاصله از نقطهٔ A باید اختیارکرد تا نیمدایره‌های مرسوم در این حالت سطح نیمدایرهٔ مفروض را به دو جزء هم‌ارز تجزیه‌کنند. مجموع درازاهای دونیمدایره را حساب‌کنید.

۱۹- نیمدایرهٔ به قطرAB را درنظر گرفته‌ونقطهٔ M را برقطرانتخاب می‌کنیم‌ودونیمدایره به قطرهـای AM و MB رسم می‌کنیم. تحقیق کنید مجموع درازای دونیمدایره با درازای نیمدایرهٔ مفروض چه رابطه‌ای‌دارد. برپاره‌خط AM نقطه‌ای مانند M' اختیارکرده وبه‌قطرهای AM' و $M'M$ دونیمدایره رسم می‌کنیم، مجموع درازاهای‌دونیمدایرهٔ اخیر با نیمدایرهٔ

به قطر AM چه رابطه‌ای دارد؟ نقطهٔ M'' را برپاره خط MB اختیار کرده و به اقطار MM'' و $M''B$ نیمدایره‌هایی رسم می کنیم، مجموع درازاهای چهارنیمدایره با درازای نیمدایرهٔ مفروض چه رابطه‌ای دارد؟ اگر این کاررا ادامه دهیم، نیمدایره‌ها تدریجاً به قطر AB نزدیك می‌شوند. چه نتیجه‌ای می‌توانید داشته باشید؟ آیا درازای قطر AB با نیمدایرهٔ مفروض یکی‌است؟ نتیجه را چگونه توجیه می‌کنید ؟

۲۰ - دوصفحهٔ موازی P و P' وخط D که موازی آنها نیست مفروضند، خطی مشخص کنید که ازنقطهٔمعین A بگذرد وخط D را درنقطه‌ای مانند O و دوصفحهٔ P و P' را درنقاط M و M' قطع کند چنان‌که نقطهٔ O وسط MM' باشد .

۲۱ - دوخطمتنافر D و D' وخط δ که‌باهیچ‌یك‌ازآنهاموازی‌نیست مفروضند، خطی‌مشخص کنید که سه‌خط مزبوررا به‌ترتیب درنقاط M و M' و O قطع کند ونقطهٔ O وسط MM' باشد.

۲۲ - دوخط متنافر d و d' مفروضند . ثابت کنید برای آن‌که بتوانیم برخط d صفحه‌ای مرور دهیم‌که برخط d' عمود باشد، باید دوخط مزبور برهم عمود باشند .

۲۳ - از نقطهٔ O واقع درخارج صفحهٔ P خط d را عمود برصفحه درنظرگرفته و ازهمان نقطه خطی مانند d' را عمود برخط δ از صفحهٔ P درنظر می گیریم، ثابت‌کنید پـاره خطی که پایهای دوعمود را به هم وصل می‌کند برخط δ عمود است .

۲۴- ثابت‌کنید اگرخط وصفحه‌ای بریك خط مفروض عمودباشند، موازی یکدیگرند.

۲۵- ثابت کنید مکان هندسی نقاطی که از یك صفحهٔ P به یك فاصله‌اند، دوصفحهٔ موازی با صفحهٔ P است.

۲۶ - مکان هندسی نقاطی را تعیین‌کنیدکه از سه رأس یك مثلث به یك فاصله باشند.

۲۷ - نقاط A و B و C غیرواقع بریك خط راست و نقطهٔ O خارج صفحهٔ آنها مفروضند؛ صفحه‌ای مشخص کنید که نقطهٔ O را شامل باشد و سه نقطهٔ A و B و C از آن صفحه به یك فاصله باشند.

